KODE MAT. 09

TRIGONOMETRI

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT.09

Trigonometri

SUDUT	SIN	COS	TAN
0^0	0	1	0
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45^0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60^0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90^0	1	0	?

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT.09

Trigonometri

Penyusun:

Drs. Mega Teguh B., M.Pd.

Editor:
Dr. Manuharawati, MSi.
Dra. Kusrini, M.Pd.

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas karunia dan hidayah-Nya, kami dapat menyusun bahan ajar modul manual untuk SMK Bidang Adaptif, yakni mata pelajaran Fisika, Kimia dan Matematika. Modul yang disusun ini menggunakan pendekatan pembelajaran berdasarkan kompetensi, sebagai konsekuensi logis dari Kurikulum SMK Edisi 2004 yang menggunakan pendekatan kompetensi *(CBT: Competency Based Training).*

Sumber dan bahan ajar pokok Kurikulum SMK Edisi 2004 adalah modul, baik modul manual maupun interaktif dengan mengacu pada Standar Kompetensi Nasional (SKN) atau standarisasi pada dunia kerja dan industri. Dengan modul ini, diharapkan digunakan sebagai sumber belajar pokok oleh peserta diklat untuk mencapai kompetensi kerja standar yang diharapkan dunia kerja dan industri.

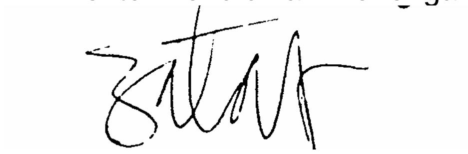
Modul ini disusun melalui beberapa tahapan proses, yakni mulai dari penyiapan materi modul, penyusunan naskah secara tertulis, kemudian disetting dengan bantuan alat-alat komputer, serta divalidasi dan diujicobakan empirik secara terbatas. Validasi dilakukan dengan teknik telaah ahli (*expert-judgment*), sementara ujicoba empirik dilakukan pada beberapa peserta diklat SMK. Harapannya, modul yang telah disusun ini merupakan bahan dan sumber belajar yang berbobot untuk membekali peserta diklat kompetensi kerja yang diharapkan. Namun demikian, karena dinamika perubahan sain dan teknologi di industri begitu cepat terjadi, maka modul ini masih akan selalu dimintakan masukan untuk bahan perbaikan atau direvisi agar supaya selalu relevan dengan kondisi lapangan.

Pekerjaan berat ini dapat terselesaikan, tentu dengan banyaknya dukungan dan bantuan dari berbagai pihak yang perlu diberikan penghargaan dan ucapan terima kasih. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini tidak berlebihan bilamana disampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada berbagai pihak, terutama tim penyusun modul (penulis, editor, tenaga komputerisasi modul, tenaga ahli desain grafis) atas dedikasi, pengorbanan waktu, tenaga, dan pikiran untuk menyelesaikan penyusunan modul ini.

Kami mengharapkan saran dan kritik dari para pakar di bidang psikologi, praktisi dunia usaha dan industri, dan pakar akademik sebagai bahan untuk melakukan peningkatan kualitas modul. Diharapkan para pemakai berpegang pada azas keterlaksanaan, kesesuaian dan fleksibilitas, dengan mengacu pada perkembangan IPTEK pada dunia usaha dan industri dan potensi SMK dan dukungan dunia usaha industri dalam rangka membekali kompetensi yang terstandar pada peserta diklat.

Demikian, semoga modul ini dapat bermanfaat bagi kita semua, khususnya peserta diklat SMK Bidang Adaptif untuk mata pelajaran Matematika, Fisika, Kimia, atau praktisi yang sedang mengembangkan modul pembelajaran untuk SMK.

Jakarta, Desember 2004
a. n. Direktur Jenderal Pendidikan
Dasar dan Menengah
Direktur Pendidikan Menengah Kejuruan,



Dr. Ir. Gatot Hari Priowirjanto, M. Sc.
NIP 130 675 814

DAFTAR ISI

- Halaman Sampul 1
- Halaman Francis 2
- Kata Pengantar 3
- Daftar Isi 5
- Peta Kedudukan Modul 7
- Daftar Judul Modul 8
- Glosary 9

I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi 10
B. Prasyarat 10
C. Petunjuk Penggunaan Modul 10
D. Tujuan Akhir 10
E. Kompetensi 11
F. Cek Kemampuan 12

II. PEMBELAJARAN

A. Rencana Belajar Peserta Diklat 14

B. Kegiatan Belajar 15

1. Kegiatan Belajar 1 16
   a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 16
   b. Uraian Materi 16
   c. Rangkuman 36
   d. Tugas 37
   e. Kunci Jawaban Tugas 38
   f. Tes Formatif 40
   g. Kunci Jawaban Formatif 41

2. Kegiatan Belajar 2 19
   a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 19
   b. Uraian Materi 19
   c. Rangkuman 31
   d. Tugas 32
   e. Tes Formatif 33
   f. Kunci Jawaban Formatif 34

3. Kegiatan Belajar 2 44
    a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 44
    b. Uraian Materi 44
    c. Rangkuman 64
    d. Tugas 65
    e. Kunci Jawaban Tugas 65
    f. Tes Formatif 67
    g. Kunci Jawaban Formatif 68

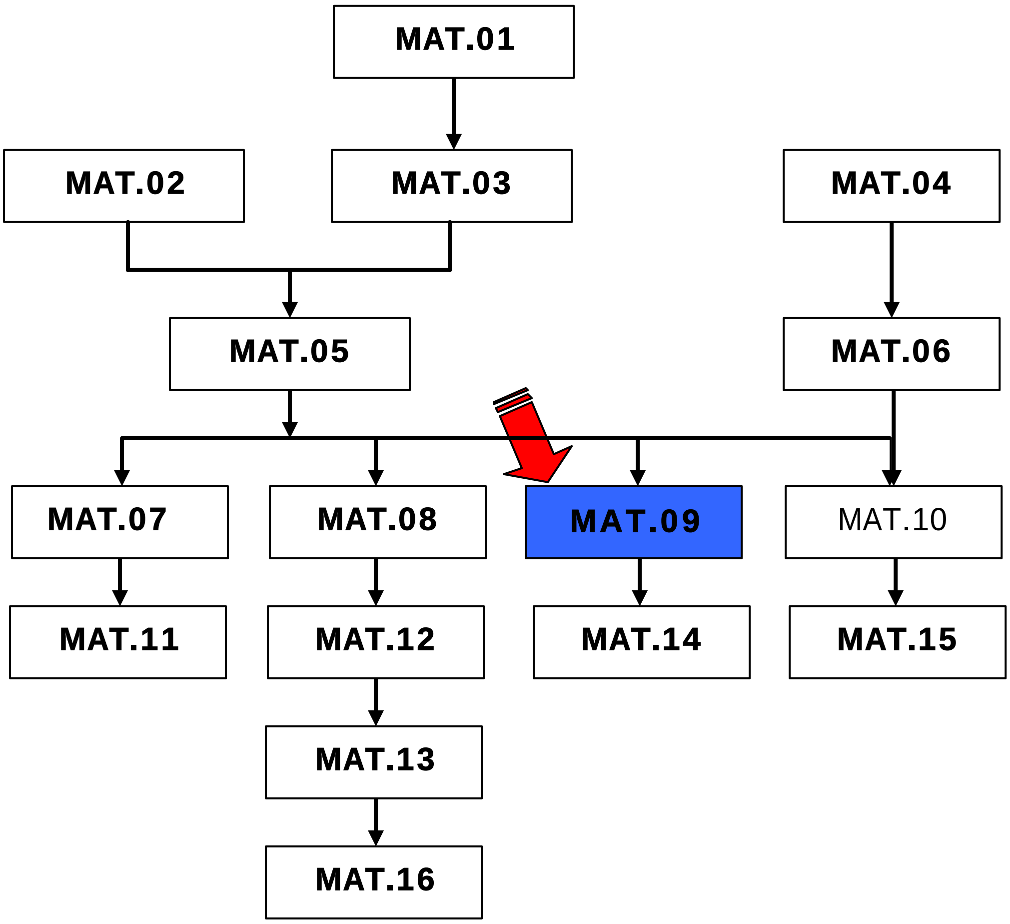
III. EVALUASI 71

KUNCI EVALUASI 72

IV. PENUTUP 75

DAFTAR PUSTAKA 76

PETA KEDUDUKAN MODUL



Daftar Judul Modul

No.	Kode Modul	Judul Modul
1	MAT.01	Matrik
2	MAT.02	Logika Matematika
3	MAT.03	Persamaan dan Pertidaksamaan
4	MAT.04	Geometri Dimensi Dua
5	MAT.05	Relasi Dan Fungsi
6	MAT.06	Geometri Dimensi Tiga
7	MAT.07	Peluang
8	MAT.08	Bilangan Real
9	MAT.09	Trigonometri
10	MAT.10	Irisan Kerucut
11	MAT.11	Statistika
12	MAT.12	Barisan
13	MAT.13	Aproksimasi Kesalahan
14	MAT.14	ProgramLinier
15	MAT.15	Vektor
16	MAT.16	Matematika Keuangan

Glossary

ISTILAH	KETERANGAN
Trigonometri	Metode dalam perhitungan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perbandingan-perbandingan pada bangun geometri, khususnya dalam bangun yang berbentuk segitiga.
Trigonometri	Merupakan salah satu ilmu yang berhubungan dengan besar sudut, dimana bermanfaat untuk menghitung ketinggian suatu tempat tanpa mengukur secara langsung sehingga bersifat lebih praktis dan efisien.
Trigonometri	Cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang perbandingan ukuran sisi suatu segitiga apabila ditinjau dari salah satu sudut yang terdapat pada segitiga tersebut.
Perbandingan sinus dari sudut ? ditulis sin ?	$\frac{CD}{CF} = \frac{CE}{CG} = \frac{CF}{CA} = \frac{CG}{CB} \ ? \ \frac{CD}{CE} = \frac{CF}{CG} = \frac{CA}{CB} = \frac{sisi\ siku\ ?\ siku\ di\ depan\ sudut\ ?}{sisi\ miring\ segitiga}$
Perbandingan cosinus dari sudut ? ditulis cos ?	$\frac{CD}{CF} = \frac{CE}{CG} = \frac{DE}{FG} = \frac{FG}{AB} \ ? \ \frac{DC}{CE} = \frac{CF}{CG} = \frac{AB}{CB} = \frac{sisi\ siku\ ?\ siku\ di\ samping\ sudut\ ?}{sisi\ miring\ segitiga}$
Perbandingan tangen dari sudut ? ditulis tan ?	$\frac{CD}{CE} = \frac{CF}{FG} = \frac{CA}{CB} = \frac{sisi\ siku\ ?\ siku\ di\ depan\ sudut\ ?}{sisi\ miring\ segitiga}$
Koordinat cartesius	Suatu sistem koordinat yang menggunakan dua garis lurus yang saling tegak lurus dan berarah dalam menentukan kedudukan suatu titik pada bidang. Di mana dua garis yang dimaksud adalah *sumbu X* dan *sumbu Y*, serta perpotongan kedua titik itu adalah *titik asal*. Koordinat cartesius sering disebut dengan koordinat siku-siku.
Koordinat kutub	Suatu koordinat yang menggunakan sebuah sinar garis sebagai patokan muka dalam menentukan kedudukan suatu titik pada bidang. Di mana titik pangkal sinar garis itu sebagai *kutub* atau *titik asal* dan sinar garis itu sendiri sebagai *sumbu kutub*.

BAB I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul ini anda akan mempelajari perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen), penggunaan perbandingan trigonometri, penentuan nilai perbandingan trigonometri di berbagai kuadran, pengertian konsep koordinat cartesius dan kutub, pengkonversian koordinat cartesius dan kutub, aturan sinus dan cosinus, penggunaan aturan sinus dan aturan cosinus, rumus luas segitiga, penentuan luas segitiga, rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut seperti: Sin (? + ?), Cos (? + ?) dan Tan ?, penggunaan rumus trigonometri jumlah dan selisih sudut. Di samping itu anda juga mempelajari identitas trigonometri, dan bentuk-bentuk persamaan trigonometri.

B. Prasyarat

Prasyarat untuk mempelajari modul ini adalah anda harus sudah mempelajari fungsi dan polinom, persamaan serta kesebangunan dua segitiga. Semua materi prasyarat tersebut terdapat dalam modul relasi dan fungsi, persamaan dan pertidaksamaan dan geometri datar dan ruang.

C. Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu anda lakukan adalah sebagai berikut.

1. Pelajari daftar isi serta skema modul dengan cermat, karena daftar isi dan skema akan menuntun anda dalam mempelajari modul ini dan kaitannya dengan modul-modul yang lain.

2. Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.
3. Pahamilah contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Jika dalam mengerjakan soal anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
4. Kerjakanlah soal evaluasi dengan cermat. Jika anda menemui kesulitan dalam mengerjakan soal evaluasi, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
5. Jika anda mempunyai kesulitan yang tidak dapat anda pecahkan, catatlah, kemudian tanyakan kepada guru pada saat kegiatan tatap muka atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan membaca referensi lain, anda juga akan mendapatkan pengetahuan tambahan.

D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. Menemukan nilai perbandingan trigonometri untuk suatu sudut,
2. Menggunakan perbandingan trigonometri,
3. Menentukan nilai perbandingan trigonometri di berbagai kuadran,
4. Mengkonversikan koordinat cartesius dan kutub,
5. Menggunakan aturan sinus dan aturan cosinus,
6. Menentukan luas segitiga,
7. Menggunakan rumus trigonometri jumlah dan selisih sudut,
8. Menyelesaikan persamaan trigonometri,
9. Rumus.

E. Kompetensi

KOMPETENSI : TRIGONOMETRI
PROGRAM KEAHLIAN : program adaptif
MATA DIKLAT/KODE : MATEMATIKA/MAT 09
DURASI PEMBELAJARAN : 40 Jam @ 45 menit

SUB KOMPETENSI	KRITERIA KINERJA	LINGKUP BELAJAR	MATERI POKOK PEMBELAJARAN		
			SIKAP	PENGETAHUAN	KETERAMPILAN
1. Menentukan dan menggunakan nilai perbandingan trigonometri suatu sudut.	✍ Perbandingan trigonometri suatu sudut ditentukan dari sisi-sisi segitiga siku-siku. ✍ Perbandingan trigonometri dipergunakan dalam menentukan panjang sisi dan besar sudut segitiga siku-siku. ✍ Sudut-sudut diberbagai kuadran ditentukan nilai perbandingan trigonometrinya.	✍ Perbandingan trigonometri. ✍ Panjang sisi dan besar sudut segitiga siku-siku. ✍ Perbandingan trigonometri di berbagai kuadran.	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah trigonometri.	✍ Perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen). ✍ Penggunaan perbandingan trigonometri. ✍ Penentuan nilai perbandingan trigonometri di berbagai kuadran.	✍ Menghitung panjang sisi dan besar sudut segitiga siku-siku. ✍ Menggambar letak titik pada koordinat cartesius dan kutub.
2. Mengkonversi koordinat cartesius dan kutub	✍ Koordinat cartesius dan koordinat kutub dibedakan sesuai pengertiannya. ✍ Koordinat cartesius dikonversi ke koordinat kutub atau sebaliknya sesuai prosedur dan rumus yang berlaku.	✍ Koordinat cartesius dan kutub. ✍ Konversi koordinat cartesius dan kutub.	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah trigonometri.	✍ Penjelasan konsep koordinat cartesius dan kutub. ✍ Pengkonversian koordinat cartesius dan kutub.	
3. Menggunakan aturan sinus dan cosinus	✍ Aturan sinus digunakan untuk menentukan panjang sisi atau besar sudut pada suatu segitiga. ✍ Aturan cosinus digunakan untuk menentukan panjang sisi atau besar sudut pada suatu segitiga.	✍ Penggunaan aturan sinus. ✍ Penggunaan aturan cosinus.	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah trigonometri	✍ Aturan sinus dan cosinus. ✍ Penggunaan aturan sinus. ✍ Penggunaan aturan cosinus.	✍ Menerapkan aturan sinus dan cosinus. ✍ Menrapkan rumus luas segitiga.

SUB KOMPETENSI	KRITERIA KINERJA	LINGKUP BELAJAR	MATERI POKOK PEMBELAJARAN		
			SIKAP	PENGETAHUAN	KETERAMPILAN
4. Menentukan luas suatu segitiga	✍ Luas segitiga dihitung dengan menggunakan rumus luas segitiga	✍ Rumus luas segitiga. ✍ Penentuan luas segitiga.	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah trigonometri.	✍ Rumus luas segitiga ✍ Penentuan luas segitiga	
5. Menggunakan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut	✍ Rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut digunakan untuk menyelesaikan soal-soal yang terkait.	✍ Rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut. ✍ Penggunaan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut.	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah trigonometri.	✍ Rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut seperti: - sin ?? +??) - cos ?? -??) - tan 2? ✍ Penggunaan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut.	✍ Menyelesaikan soal-soal dengan menggunakan rumus trigonometri jumlah selisih dua sudut. ✍ Menerapkan bentuk-bentuk persamaan trigonometri.
6. Menyelesaikan persamaan trigonometri	✍ Persamaan trigonometri dihitung penyelesaiannya.	✍ Bentuk-bentuk persamaan trigonometri.	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah trigonometri.	✍ Identitas trigonometri, seperti: - $\text{Sin}^2 x + \cos^2 x = 1$ ✍ Bentuk-bentuk persamaan trigonometri seperti: - $\sin x = a$ - $\cos px = a$ - $a \cos x + b \sin x = c$	

F. Cek kemampuan

Kerjakanlah soal-soal berikut ini. Jika anda merasa dapat mengerjakan semua soal berikut ini, maka anda dapat langsung mengerjakan soal-soal Evaluasi pada BAB III. Atau jika anda telah merasa dapat mengerjakan sebagian soal-soal pada bagian yang telah anda kuasai dengan bantuan guru maka mintalah untuk mengerjakan evaluasi pada materi yang anda kuasai.

1. Hitung nilai cos a dan sin a, jika tg a = 1
2. Sebuah tangga disandarkan tembok vertikal. Sudut yang dibentuk oleh tangga dan lantai adalah 45 derajat, hitunglah panjang tembok dari alas sampai tangga jika panjang tangga 4 m.
3. Tentukan koordinat kutub dari suatu titik jika koordinat Cartesiusnya (3,4)
4. Tentukan koordinat Cartesius dari titik (5,p)
5. Tuliskan aturan sinus dan aturan cosinus pada suatu segitiga.
6. Hitung dengan menggunakan rumus jumlah atau rumus selisih sin 75
7. Selesaikan sin x = ½
8. Jika A, B, dan C masing-masing sudut suatu segitiga (bukan segitiga siku-siku), buktikan bahwa tan A + tan B + tan C=tanA tan B tan C!.

BAB II. PEMBELAJARAN

A. Rencana Belajar Peserta Diklat

Kompetensi : Menerapkan Trigonometri.

Sub Kompetensi :

1. Menentukan dan menggunakan nilai perbandingan trigonometri suatu sudut.
2. Mengkonversi koordinat cartesius dan kutub.
3. Menggunakan aturan sinus dan cosinus.
4. Menentukan luas suatu segitiga.
5. Menggunakan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut.
6. Menyelesaikan persamaan trigonometri.

Tulislah semua jenis kegiatan yang anda lakukan di dalam tabel kegiatan di bawah ini. Jika ada perubahan dari rencana semula, berilah alasannya kemudian mintalah tanda tangan kepada guru atau instruktur anda.

Jenis Kegiatan	Tanggal	Waktu	Tempat Belajar	Alasan perubahan	Tandatangan Guru

B. Kegiatan Belajar

1. Kegiatan Belajar 1

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, diharapkan anda dapat:

- ✍ Memahami pengertian perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen).
- ✍ Menggunakan perbandingan trigonometri, kemudian menentukan nilai perbandingan trigonometri di berbagai kuadran.
- ✍ Memahami dan mampu menerapkan tentang konsep koordinat cartesius dan kutub, serta pengkonversian koordinat cartesius dan kutub.
- ✍ Memahami dan mampu menerapkan aturan sinus dan cosinus.
- ✍ Menemukan rumus segitiga melalui perbandingan trigonometri serta menggunakan rumus tersebut untuk menentukan luas segitiga.

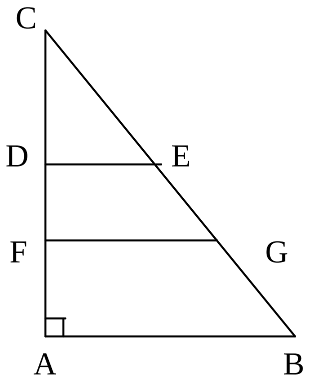
b. Uraian Materi

Trigonometri sebagai suatu metode dalam perhitungan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perbandingan-perbandingan pada bangun geometri, khususnya dalam bangun yang berbentuk segitiga. Pada prinsipnya trigonometri merupakan salah satu ilmu yang berhubungan dengan besar sudut, dimana bermanfaat untuk menghitung ketinggian suatu tempat tanpa mengukur secara langsung sehingga bersifat lebih praktis dan efisien.

Trigonometri berasal dari bahasa Yunani, dimana terdiri dari dua buah kata yaitu trigonom berarti bangun yang mempunyai tiga sudut dan sisi (segitiga) dan metrom berarti suatu ukuran. Dari arti dua kata di atas, trigonometri dapat diartikan sebagai cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang perbandingan ukuran sisi suatu segitiga apabila ditinjau dari salah satu sudut yang terdapat pada segitiga tersebut. Dalam mempelajari perbandingan sisi-sisi segitiga pada trigonometri, maka segitiga itu harus mempunyai tepat satu sudutnya (90^0) artinya segitiga itu tidak lain adalah segitiga siku-siku.

1) Perbandingan Trigonometri (Sinus, Cosinus Dan Tangen)

Misalkan diketahui ?ABC merupakan segitiga siku-siku di A. Titik D dan F terletak pada ruas garis AC dimana D ? F ? A ? C, titik E dan G terletak pada ruas garis BC dimana E ? G ? B ? C, sedemikian hingga $\overline{DE}$ // $\overline{FG}$ // $\overline{AB}$. Untuk lebih jelasnya coba diperhatikan gambar di bawah ini:



Pandang ?ABC, ?FGC dan ?CDE

m?ACB = m?FCG = m?DEC....(Berimpit)

m?BAC = m?GFC = m?EDC....(90^0)

m?ABC = m?FGC = m?DEC ....(Dua sudut lain yang bersesuaian sama besar)

sehingga menyebabkan:

?ABC ? ?FGC ? ?CDE

Akibatnya: sisi-sisi yang bersesuaian perbandingannya selalu dan tetap.

1. $\dfrac{CD}{CF} = \dfrac{CE}{CG} = \dfrac{CF}{CA} = \dfrac{CG}{CB}$? $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CF}{CG} = \dfrac{CA}{CB} =$

   $\dfrac{sisi\ siku\ ?\ siku\ di\ depan\ sudut\ ?}{sisi\ miring\ segitiga}$

   Perbandingan ini disebut sinus dari sudut ? ditulis sin ?

2. $\dfrac{CD}{CF} = \dfrac{CE}{CG} = \dfrac{DE}{FG} = \dfrac{FG}{AB}$? $\dfrac{DC}{CE} = \dfrac{CF}{CG} = \dfrac{AB}{CB} =$

   $\dfrac{sisi\ siku\ ?\ siku\ di\ samping\ sudut\ ?}{sisi\ miring\ segitiga}$

   Perbandingan ini disebut cosinus dari sudut ? ditulis cos ?

3. $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CF}{FG} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{sisi\ siku\ ?\ siku\ di\ depan\ sudut\ ?}{sisi\ miring\ segitiga}$

   Perbandingan ini disebut tangen dari sudut ? ditulis tan ?

Selain tiga perbandingan di atas, disepakati juga perbandingan kebalikan yaitu cotangen, secan, dan cosecan yang secara berurutan disingkat ctg, sec dan cosec (csc) dengan ketentuan sebagai berikut:

$$\text{Ctg } ? = \frac{1}{tg?}\ ;\ \text{Cosec } ? = \frac{1}{\sin ?}\ ;\ \text{Sec } ? = \frac{1}{\cos ?}$$

Dari uraian di atas, dapat kita jelaskan perbandingan trigonometri sebagai berikut.

$$\text{Sin } ? = \frac{sisi\ siku\ ?\ siku\ didepan\ sudut\ ?}{sisi\ miring} = \frac{AC}{BC}$$

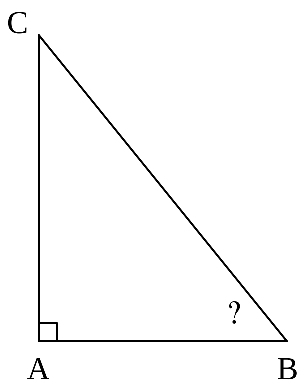
$$\text{Cos } ? = \frac{sisi\ siku\ ?\ siku\ disamping\ sudut\ ?}{sisi\ miring} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{Tan } ? = \frac{sisi\ siku\ ?\ siku\ didepan\ sudut\ ?}{sisi\ siku\ ?\ siku\ di\ samping\ sudut\ ?} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{Ctg } ? = \frac{1}{tg\ ?} = \frac{1}{\frac{AC}{AB}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Sec } ? = \frac{1}{\cos ?} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{Cosec } ? = \frac{1}{\sin ?} = \frac{1}{\frac{AC}{BC}} = \frac{BC}{AC}$$



Untuk mempermudah dalam menghafal, cara yang dapat dipakai sebagai berikut:

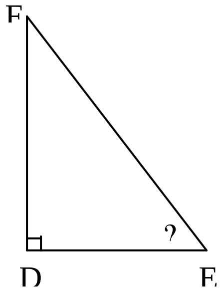
Sindemi ? sinus = $\frac{depan}{miring}$
Cossami ? cosinus = $\frac{samping}{miring}$
Tandesa ? Tangen = $\frac{depan}{samping}$

Rumus lain:

Tan ? = $\frac{\sin ?}{\cos ?}$; Cotan ? = $\frac{\cos ?}{\sin ?}$; $\sin^2 ? + \cos^2 ? = 1$

Contoh 1

1)



Tentukan nilai sin ?, cos ? dan tan ? dari segitiga di samping ini, jika DE = 6 dan DF = 8.

Jawab:

Pandang ?DEF yang salah satu sudutnya siku-siku (90^0), berarti ?DEF merupakan segitiga siku-siku sehingga berlaku teorema phytagoras, yaitu:

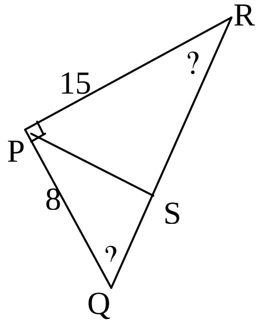
$EF^2 = DE^2 + DF^2$

$= 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

EF $= \sqrt{100} = 10$

Jadi; sin ? = $\frac{DF}{EF} = \frac{8}{10}$, cos ? = $\frac{DE}{EF} = \frac{6}{10}$ dan tan ? = $\frac{DF}{DE} = \frac{8}{6}$

2)



Perhatikan segitiga di samping ini, kemudian tentukan panjang SR, QS dan PS!

Jawab:

$QR^2 = PQ^2 + PR^2$

$= 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$

QR $= \sqrt{289} = 17$

Pandang ?PQR: cos ? = $\frac{PR}{QR} = \frac{15}{17}$

Pandang ?PSR: cos ? = $\frac{SR}{PR} = \frac{SR}{15}$

Nilai cos ? dari ?PQR = nilai cos ? dari ?PSR, hal ini dikarenakan besar suatu sudut yang sama adalah sama (? besarnya sama).

Jadi, berlaku persamaan berikut ini.

$\frac{15}{17} = \frac{SR}{15}$?? 17 SR = 15 x 15 = 225 ? SR = $\frac{225}{17} = 13\frac{4}{17}$

QR = QS + SR ? QS = QR – SR = 17 - $13\frac{4}{17}$ = $3\frac{13}{17}$

Untuk mencari PS dapat dipakai beberapa cara:

Cara 1.

Pandang ? PQR: sin ? = $\frac{PQ}{QR} = \frac{8}{17}$

Pandang ? PSR: sin ? = $\frac{PS}{PR} = \frac{PS}{15}$

Sehingga berlaku: $\frac{8}{17} = \frac{PS}{15}$? 17 PS = 8 x 15 ? PS = $\frac{120}{17} = 7\frac{1}{17}$

Cara 2.

Pandang ? PQR: sin ? = $\frac{PR}{QR} = \frac{15}{17}$

Pandang ? PQS: sin ? = $\frac{PS}{PQ} = \frac{PS}{8}$

Sehingga berlaku: $\frac{15}{17} = \frac{PS}{8}$? 17 PS = 8 x 15 ? PS = $\frac{120}{17} = 7\frac{1}{17}$

Cara 3.

Pandang ?? PQS, segitiga tersebut merupakan segitiga siku-siku dengan sudut siku di titik P. Karena PQ = 8 dan QS sudah kita temukan nilainya yaitu $3\frac{13}{17}$, maka untuk mencari nilai PS kita gunakan teorema phytagoras sebagai berikut:

$PQ^2 = QS^2 + PS^2$

$PS^2 = PQ^2 - QS^2$

$= 82 - (3\frac{13}{17})2$

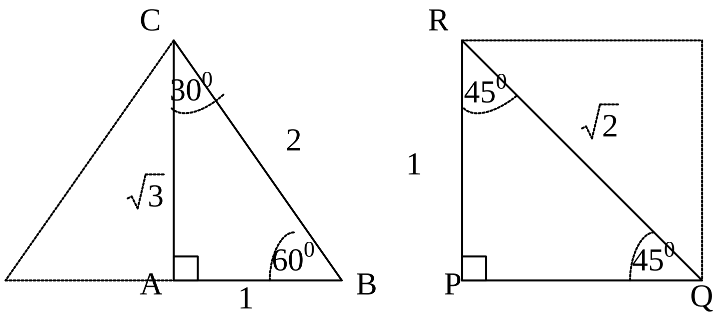
$= 64 - (\frac{64}{17})2 = 64 - \frac{64^2}{17^2} = \frac{64(17^2 ? 64)}{17^2}$

$$= \frac{64(17\ ?\ 8)(17\ ?\ 8)}{17^2}$$

$$PS = \sqrt{\frac{64 ? 25 ? 9}{17^2}} = \frac{8.5.3}{17} = \frac{120}{17} = 7\frac{1}{17}$$

2) Nilai Sinus, Cosinus dan Tangen Sudut Istimewa

Sudut istimewa di sini adalah sudut-sudut yang besarnya 0, 30, 45, 60 dan 90 derajat. Untuk mencari nilai sinus, cosinus dan tangen dari sudut-sudut istimewa di atas, marilah kita perhatikan dua segitiga siku-siku di bawah ini.



(I) (II)

Segitiga siku-siku yang pertama dibentuk dari segitiga sama sisi dengan panjang sisi 2 satuan, di mana dipotong menurut salah satu garis sumbunya. Sedangkan siku-siku yang kedua dibentuk dari persegi dengan panjang 1 satuan, di mana dipotong menurut salah satu diagonalnya. Cara menentukan nilai dari sinus, cosinus dan tangen adalah sebagai berikut.

Pada segitiga I:

Sin $30^0 = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$; Sin $60^0 = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Cos $60^0 = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$; Cos $60^0 = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Tan $30^0 = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 x \sqrt{3}}{\sqrt{3}\, x \sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; Tan $60^0 = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

<u>Pada segitiga II</u>:

Sin $45^0 = \frac{PQ}{QR} = \frac{PR}{QR} = \frac{1}{2} = \frac{1x\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,x\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

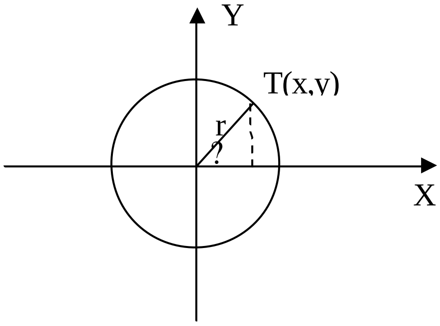
Cos $45^0 = \frac{PR}{QR} = \frac{PQ}{QR} = \frac{1}{2} = \frac{1x\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,x\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Tan $45^0 = \frac{PQ}{PR} = \frac{PR}{PQ} = \frac{1}{1} = 1$

Untuk sudut nol dan siku-siku, cara memperoleh nilai sinus, cosinus dan tangen adalah sebagai berikut.

Misalkan diketahui suatu lingkaran yang berpusat di (0,0) dan berjari-jari r satuan.

Ambil suatu titik pada lingkaran yaitu titik T (x,y).



Pada gambar di samping kan di dapat nilai:

Sin ? = $\frac{y}{r}$; Cos ? = $\frac{x}{r}$; Tan ? = $\frac{y}{x}$

sudut nol terjadi jika titik T berimpit dengan sumbu X, sehingga: sin $0^0 = \frac{0}{r} = 0$; cos $0^0 = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1$; Tan $0^0 = \frac{0}{x} = 0$.

Sedangkan sudut siku-siku atau 90^0 terjadi jika titik T berimpit dengan sumbu Y, sehingga: sin $90^0 = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1$; cos $90^0 = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$; Tan $90^0 = \frac{y}{x} = \frac{r}{0} =$ tak terdefinisikan (artinya tan 90^0 tidak mempunyai nilai atau tan 90^0 = ?).

Dari uraian di atas dapat kita buat tabel nilai sinus, cosinus dan tangen sebagai berikut.

SUDUT	SIN	COS	TAN
0^0	0	1	0
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45^0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60^0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90^0	1	0	?

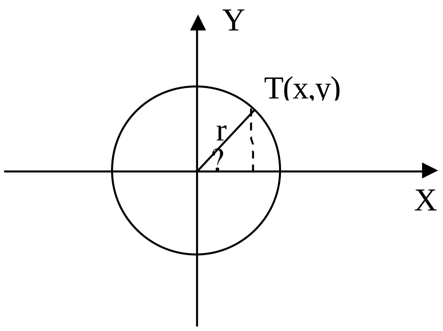
3) Perbandingan Trigonometri di Berbagai Kuadran

Sistem kuadran pada bidang cartesius terbagi menjadi 4 bagian yang ditetapkan sebagai berikut:

Kuadran I : daerah yang dibatasi oleh sumbu X positif dan sumbu Y positif.
Kuadran II : daerah yang dibatasi oleh sumbu X negatif dan sumbu Y positif.
Kuadran III : daerah yang dibatasi oleh sumbu X negatif dan sumbu Y negatif.
Kuadran IV: daerah yang dibatasi oleh sumbu X positif dan sumbu Y negatif.

Sedangkan nilai perbandingan trigonometri di berbagai kuadran di atas, dapat dijelaskan dengan gambar berikut ini.

<u>Kuadran I</u>:

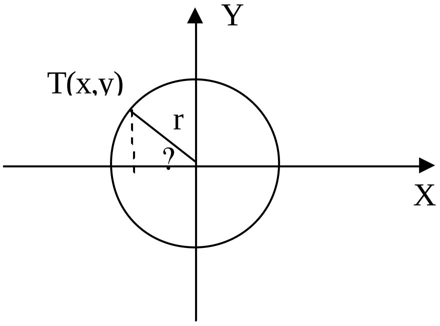


Sin ? $= \frac{y}{r} = +$

Cos ? $= \frac{x}{r} = +$

Tan ? $= \frac{y}{x} = +$

Kuadran II:

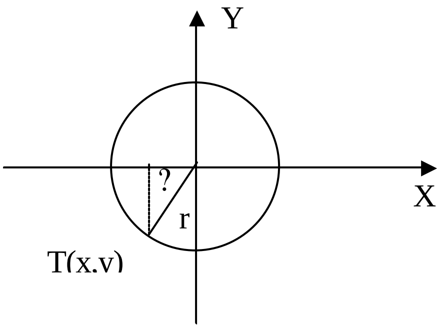


$$\text{Sin } ? = \frac{y}{r} = +$$

$$\text{Cos } ? = \frac{?\,x}{r} = -$$

$$\text{Tan } ? = \frac{y}{?\,x} = -$$

Kuadran III:

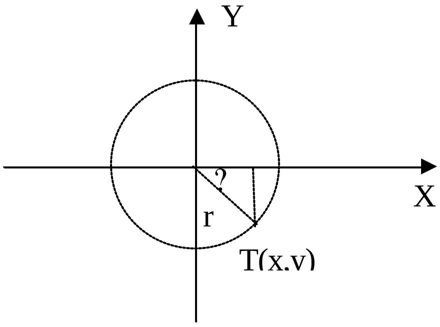


$$\text{Sin } ? = \frac{?\,y}{r} = -$$

$$\text{Cos } ? = \frac{?\,x}{r} = -$$

$$\text{Tan } ? = \frac{?\,y}{?\,x} = +$$

Kudran IV:



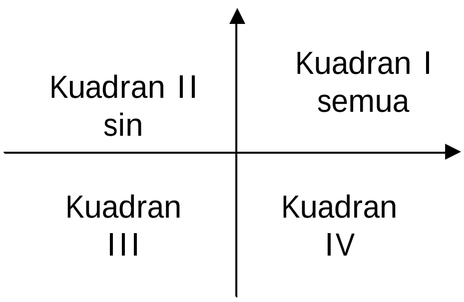
$$\text{Sin } ? = \frac{?\,y}{r} = -$$

$$\text{Cos } ? = \frac{x}{r} = +$$

$$\text{Tan } ? = \frac{?\,y}{x} = -$$

Untuk lebih mempermudah mengingat perbandingan trigonometri dapat dilakukan dengan membaca gambar berikut.

Yang positif adalah



4) Penggunaan Perbandingan Trigonometri

Banyak sekali kegunaan konsep perbandingan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari, terutama pada kasus-kasus yang melibatkan segitiga siku-siku meliputi panjang sisi dan besar sudut siku-siku. Salah satu kegunaan trigonometri adalah menghitung tinggi atau jarak pada kasus terapan seperti yang akan dicontohkan berikut ini.

Contoh 2

Sebuah tangga disandarkan pada suatu tembok vertikal. Sudut yang dibentuk oleh tangga itu dengan lantai horizontal adalah 60^0. Jika jarak kaki tangga ke tembok tadi adalah 6 m, hitunglah:

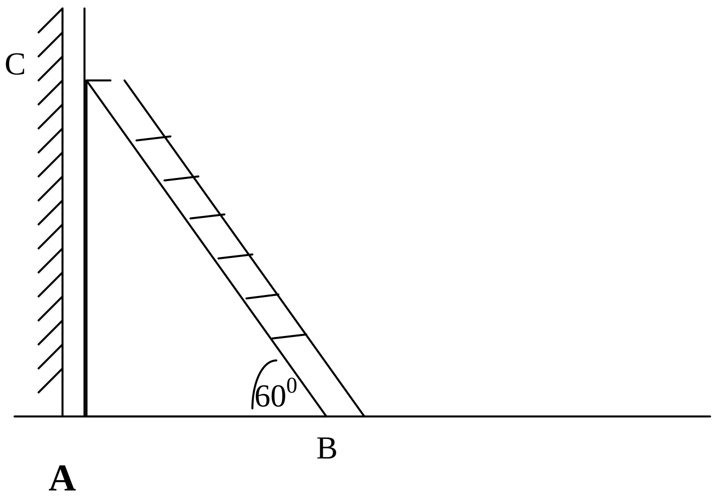
a. Panjang tangga itu

b. Tinggi tembok dari ujung tangga ke lantai

c. Misal sudut antara tangga dan lantai adalah ? , tentukan nilai ? apabila panjang tangga $6\sqrt{2}$ m.

Jawab:

Situasi contoh di atas dapat digambarkan sebagai berikut.



Pandang ??ABC yang terbentuk, maka ??ABC merupakan segitiga siku-siku di A. BC adalah panjang tangga dan AC adalah tinggi tembok ke lantai, sehingga:

a. Menurut perbandingan cosinus:

$$\text{Cos } 60^0 = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{BC}$$

? $\cos 60^0 . BC = 6$

? $\frac{1}{2} . BC = 6$

? $BC = 12$

Jadi panjang tangga tersebut dalah 12 m.

b. Menurut perbandingan tangen:

$\tan 60^0 = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{6}$

? $\tan 60^0 . 6 = AC$

? $AC = \sqrt{3} . 6 = 6\sqrt{3}$

Jadi tinggi tembok dari ujung tangga ke lantai adalah $6\sqrt{3}$ m.

c. Menurut perbandingan cosinus:

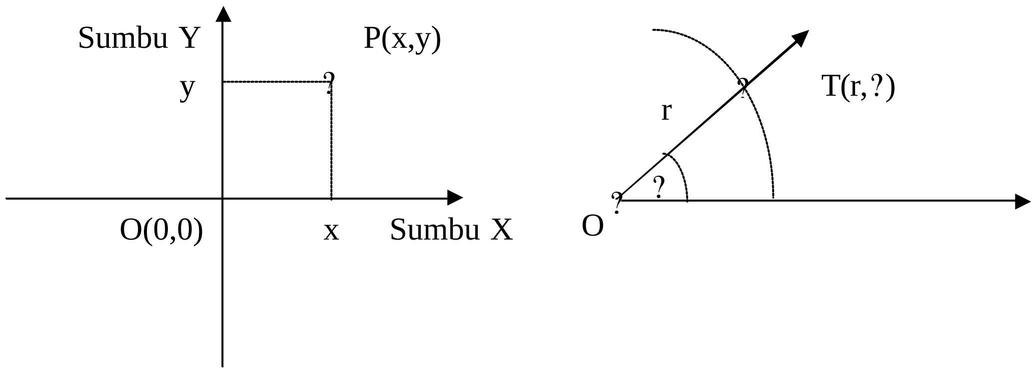
$\cos ? = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Jadi besar ? $= 45^0$

5) Koordinat Cartesius dan Kutub

Koordinat cartesius adalah suatu sistem koordinat yang menggunakan dua garis lurus yang saling tegak lurus dan berarah dalam menentukan kedudukan suatu titik pada bidang. Di mana dua garis yang dimaksud adalah *sumbu X* dan *sumbu Y,* serta perpotongan kedua titik itu adalah *titik asal*. Koordinat cartesius sering disebut dengan koordinat siku-siku. Sedangkan koordinat kutub adalah suatu koordinat yang menggunakan sebuah sinar garis sebagai patokan muka dalam menentukan kedudukan suatu titik pada bidang. Di mana titik pangkal sinar garis itu sebagai *kutub* atau *titik asal* dan sinar garis itu sendiri sebagai *sumbu kutub*.

Untuk lebih jelasnya pemahaman kita tentang koordinat cartesius dan koordinat kutub, mari kita perhatikan gambar kedua koordinat itu.

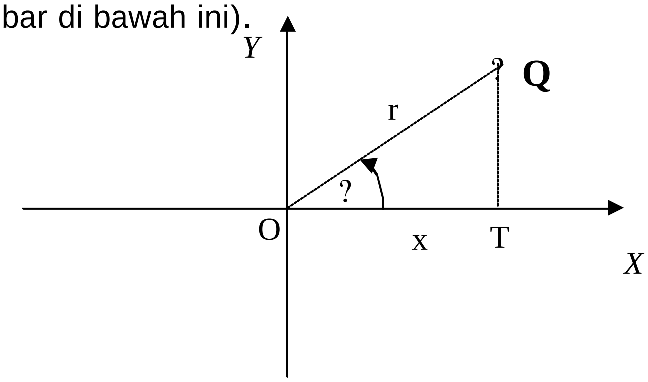


(I) (II)

Pada gambar (I) merupakan contoh koordinat cartesius yang menggambarkan kedudukan titik P, sedangkan gambar (II) merupakan contoh koordinat kutub yang menggambarkan kedudukan titik T.

6) Konversi Koordinat Cartesius dan Kutub

Misalkan dalam koordinat cartesius, sumbu X positif dipandang sebagai sumbu kutub dan titik asal O (dalam sistem koordinat cartesius) dipandang pula sebagai titik asal dari sistem koordinat kutub. Ambil suatu titik pada suatu bidang misal Q(x,y) dalam sistem koordinat cartesius yang dinyatakan sebagai Q(r, ?) dalam sistem koordinat kutub (perhatikan gambar di bawah ini).



Pandang ?OTQ siku-siku di T, maka melaui perbandingan trigonometri diperoleh hubungan sebagai berikut.

Cos ? = $\frac{x}{r}$? x = r Cos ?...............(1)

Sin ? = $\frac{y}{r}$? y = r sin ?................(2)

Kedua ruas persamaan (1) dan (2) dikuadratkan, kemudian kedua persamaan itu dijumlahkan, sehingga diperoleh hubungan berikut.

$(x^2 + y^2) = (r^2 \text{Cos}^2 ? + r^2 \sin^2 ?)$

$x^2 + y^2 = r^2 (\text{Cos}^2 ? + \sin^2 ?)$

$x^2 + y^2 = r^2 (1)$........ karena $\text{Cos}^2 ? + \sin^2 ? = \sin^2 ? + \text{Cos}^2 ? = 1$

$x^2 + y^2 = r^2 ? \quad r = \sqrt{x^2 ? y^2}$

$\text{Tan } ? = \frac{y}{x} ? \quad ? = \text{arc tan } \frac{y}{x}$

Untuk menyelidiki harga ? yang memenuhi, dapat kita cari dari Cos $? = \frac{x}{r}$

dan Sin $? = \frac{y}{r}$ sehingga diperoleh hubungan berikut ini.

$? = \text{arc cos } \frac{x}{\sqrt{x^2 ? y^2}}$

$? = \text{arc sin } \frac{y}{\sqrt{x^2 ? y^2}}$

Contoh 3

a. Tentukan koordinat cartesius dari titik yang koordinat kutubnya adalah $(4, \frac{?}{6})$!

Jawab:

$r = 4$ dan $? = \frac{?}{6}$, maka $x = 4. \cos \frac{?}{6} = 4. \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

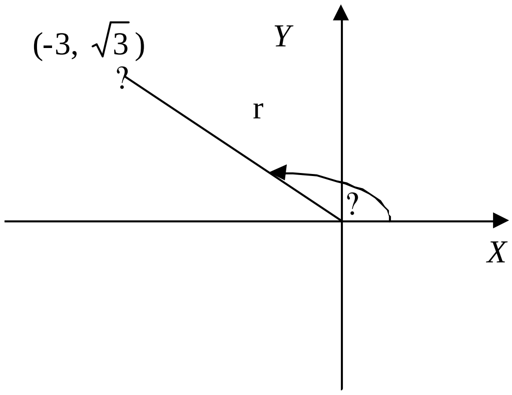
$y = 4. \sin \frac{?}{6} = 4. \frac{1}{2} = 2$

Jadi titik $(4, \frac{?}{6})$ dalam koordinat kutub dapat dinyatakan dalam koordinat cartesius sebagai $(2\sqrt{3}, 2)$

b. Tentukan koordinat kutub dari titik yang koordinat cartesiusnya $(-3, \sqrt{3})$!

Jawab:

Titik $(-3, \sqrt{3})$ merupakan titik dalam kuadran II, maka ? memenuhi 90 < ? < 180 artinya ? harus tumpul.



$r^2 = (-3)^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 + 9 = 18$

$r = \sqrt{18} = 2\sqrt{3}$

Tan ? $= \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{?\,3} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

? $= (180 - 30) = 150 = \frac{5?}{6}$

Jadi titik $(-3, \sqrt{3})$ dalam koordinat cartesius dapat dinyatakan dalam koordinat kutub sebagai $(2\sqrt{3}, \frac{5?}{6})$.

7) Aturan Sinus dan Cosinus

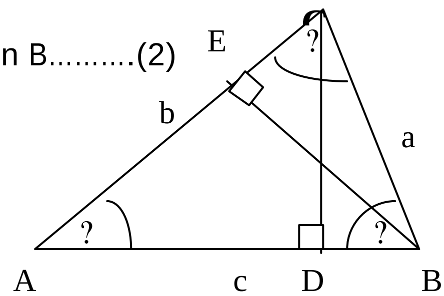
Mencari Rumus Sinus

Misalkan ?ABC adalah segitiga dengan ? CAB = ? ; ? ABC = ? dan ? BCA = ? serta panjang BC, AC dan AB berturut-turut adalah a, b dan c.

Tarik garis melalui titik C di luar garis AB tegak lurus garis tersebut, misal $\overline{CD}$.

Sin A $= \frac{CD}{AC}$? CD = AC.Sin A? CD = b Sin A ....(1)

Sin B $= \frac{CD}{BC}$? CD = BC. Sin B ? CD = a Sin B..........(2)



Dari (1) dan (2) didapat:

b Sin A = a Sin B? $\frac{a}{Sin\,A} = \frac{b}{Sin\,B}$ ....(3)

Tarik garis melalui titik B di luar garis AC tegak lurus garis tersebut, misal $\overline{BE}$.

Sin A $= \frac{BE}{AB}$? BE = AB. Sin A ? BE = c Sin A.......(4)

Sin C = $\frac{BE}{BC}$? BE = BC. Sin C ? BE = a Sin C.......(5)

Dari (4) dan (5) didapat:

c SinA = a Sin C ? $\frac{a}{Sin\,A} = \frac{c}{SinC}$ ....(6)

Dari (3) dan (6) di dapat:

$\frac{a}{Sin\,A} = \frac{b}{Sin\,B} = \frac{c}{SinC}$? $\frac{a}{Sin\,?} = \frac{b}{Sin\,?} = \frac{c}{Sin\,?}$; disebut juga rumus/aturan sinus.

Rumus sinus: $\boxed{\frac{a}{\sin ?} = \frac{b}{\sin ?} = \frac{c}{\sin ?}}$

Mencari Rumus Cosinus

Misalkan ? ABC adalah segitiga dengan ? CAB = ? ; ? ABC = ? dan ? BCA = ? serta panjang BC, AC dan AB berturut-turut adalah a, b dan c.

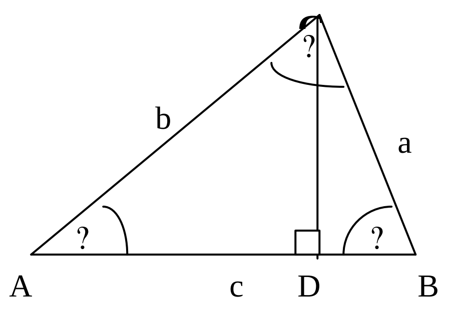
Tarik garis melalui titik C di luar garis AB tegak lurus garis tersebut, misal $\overline{CD}$.

Sin A = $\frac{CD}{AC}$? CD = b. Sin A.........(1)

Cos A = $\frac{AD}{AC}$? AD = b. Cos A

BD = AB – AD = c – b. Cos A.........(2)

Pandang ? BDC siku-siku di D, maka berlaku teorema phytagoras:



$BC^2 = BD^2 + CD^2$

$a^2 = (c – b \text{ Cos } A)^2 + (b \text{ Sin } A)^2$

$= c^2 – 2bc \text{ Cos } A + b^2 \text{Cos}^2 A + b^2 \text{ Sin}^2 A$

$= c^2 – 2bc \text{ Cos } A + b^2 (\text{Cos}^2 A + \text{Sin}^2 A)$

$= c^2 – 2bc \text{ Cos } A + b^2 (1)$

$a^2 = b^2 + c^2 – 2bc \text{ Cos } A$

Dengan cara yang sebanding, kita akan memperoleh rumus cosinus yang lain yaitu:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac \cos ?$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab \cos ?$

Buktikan sendiri di rumahmu!

Rumus Cosinus:

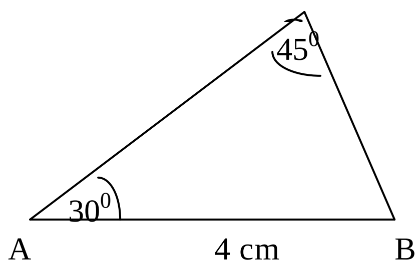
$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos ? \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac \cos ? \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab \cos ? \end{array}}$$

8) Penggunaan Aturan Sinus

Aturan sinus sangat bermanfaat untuk menghitung panjang sisi atau besar sudut pada suatu segitiga.

Contoh 4

a. Diketahui ?? ABC dengan AB = 4 cm, ? CAB = 30^0 dan ? BCA = 45^0. Tentukan panjang BC?



Jawab:

Berdasarkan aturan sinus:

$$\frac{BC}{\sin 30^0} = \frac{AB}{\sin 45^0}$$

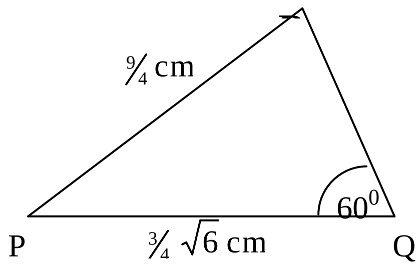
$$\frac{BC}{?\frac{1}{2}?} = \frac{4}{?\frac{1}{2}\sqrt{2}?}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\ .\ BC = 4 \times \frac{1}{2}$$

$$BC = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} =$$

Jadi panjang BC adalah $2\sqrt{2}$ cm.

b. Diketahui ?? PQR dengan ? PQR = 60^0, PQ = $\frac{3}{4}\sqrt{6}$ cm dan PR = $\frac{9}{4}$ cm. Tentukan besar sudut ? PRQ dan ? RPQ !



Jawab:

Berdasarkan aturan sinus:

$$\frac{PR}{\sin 60^0} = \frac{PQ}{\sin\ ?\ PRQ}$$

$$\frac{9/4}{1/2\sqrt{3}} = \frac{3/4\sqrt{6}}{\sin\ ?\ PRQ}$$

$$\frac{9}{4}\ .\ \text{Sin}\ ?\ \text{PRQ} = \frac{3}{4}\sqrt{6}\ \text{x}\ \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{8}\sqrt{18}$$

$$\sin\ ?\ \text{PRQ} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ ?\quad ?\ \text{PRQ} = 45^0$$

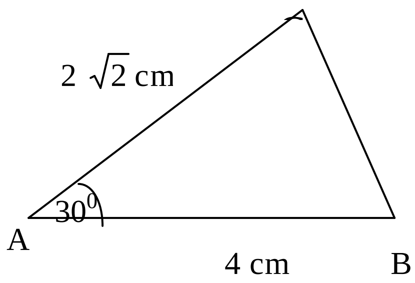
Jadi besar sudut ? PRQ adalah 45^0, sedangkan besar sudut? RPQ $=180^0-(65^0+45^0) = 70^0$.

9) Penggunaan Aturan Cosinus

Seperti halnya aturan sinus, aturan cosinus sangat bermanfaat untuk menghitung panjang sisi atau besar sudut pada suatu segitiga.

Contoh 5

a. Diketahui ?? ABC dengan AB = 4 cm dan AC = $2\sqrt{2}$ cm, ? CAB = 30^0. Tentukan panjang BC?



Jawab:

Berdasarkan aturan cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc\ \cos\ ?$$

$$= (2\sqrt{2})^2 + (4)^2 - 2.\ 2\sqrt{2}\ .\ 4.\ \cos 30^0$$

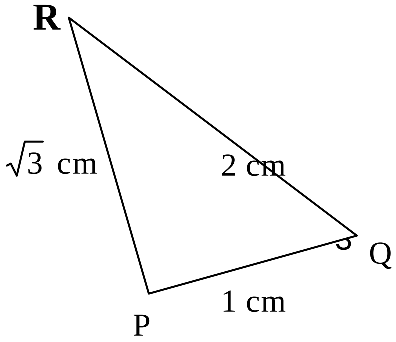
$$= 8 + 16 - 16\sqrt{2}\ .\ \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= 24 - 8\sqrt{6}$$

$$a = \sqrt{24\ ?\ 8\sqrt{6}} = 2\sqrt{6\ ?\ 2\sqrt{6}}$$

Jadi panjang BC adalah $2\sqrt{6\ ?\ 2\sqrt{6}}$ cm.

b. Diketahui ?? PQR dengan PR = $\sqrt{3}$ cm, PQ = 1 cm dan QR = 2 cm. Tentukan besar ? PQR!



Jawab:

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2\ PQ.QR\ \text{Cos}\ Q$

$(\sqrt{3})^2 = (1)^2 + (2)^2 - 2.\ 1.2\ \text{Cos}\ Q$

$= 5 - 4\ \text{Cos}\ Q$

$4\text{Cos}\ Q = 2$

$\text{Cos}\ Q = \frac{1}{2}$

? PQR $= 60^0$

Jadi besar ? PQR adalah 60^0

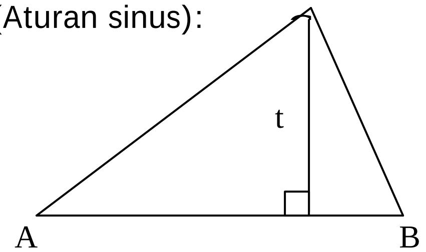
10) Rumus Luas Segitiga

Luas segitiga adalah banyaknya satuan luas yang tepat menutupi permukaan segitiga itu. Rumus luas segitiga, ada tiga cara yaitu:

Cara I: Luas segitiga= $\frac{1}{2}$ x alas x Tinggi; rumus ini dapat digunakan jika salah satu alas dan garis tinggi pada alas tersebut diketahui.

Cara II:

Menghitung luas segitiga menggunakan perbandingan trigonometri (Aturan sinus):



L ?ABC = $\frac{1}{2}$ x AB x t

Sin A = $\frac{t}{AC}$? t = AC.Sin A

Sehingga, L ?ABC = $\frac{1}{2}$ x AB x AC.Sin A

$= \frac{1}{2}$ cb sin A

$= \frac{1}{2}$ bc sin A

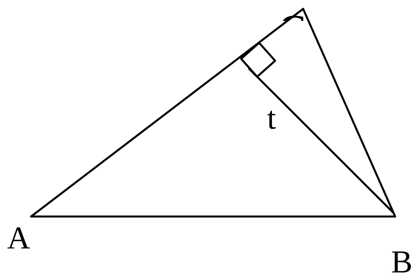
Dengan memperhatikan ? B, didapat:

t = BC. Sin A

Sehingga, L ?ABC = $\frac{1}{2}$ x AB x BC. Sin A

= $\frac{1}{2}$ ca sin A

= $\frac{1}{2}$ ac sin A



Dengan memperhatikan ? C, didapat:

t = BC. Sin C

Sehingga, L ?ABC = $\frac{1}{2}$ x AC x BC. Sin C

= $\frac{1}{2}$ ba sin C

= $\frac{1}{2}$ ab sin C

Ketiga rumus luas segitiga di atas dapat digunakan apabila diketahui sebuah sudut dan dua sisi yang mengapit sudut tersebut.

<u>Cara III</u>:

Berdasarkan rumus/aturan cosinus yaitu

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \cos ?$? Cos ? = $\frac{b^2 ? c^2 ? a^2}{2bc}$

Karena $\sin^2 ? + \cos^2 ? = 1$? $\sin^2 ? = 1 - \cos^2 ?$

Maka: $\sin^2 ? = (1 + \cos ?)(1 - \cos ?)$

$$= ?1 ? \frac{b^2 ? c^2 ? a^2}{2bc} ? ?1 ? \frac{b^2 ? c^2 ? a^2}{2bc} ?$$

$$= \frac{1}{4b^2c^2}(a + b + c)(b + c - a)(a + b - c)(a + c - b)$$

Misalkan ada satu bilangan real positif s = ½ keliling ?ABC = ½ (a+b+c)

Maka: Sin A = $\sqrt{\frac{1}{4b2c2}(2s)\{2(s ? a)\}\{2(s ? b)\}\{2(s ? c)\}}$

$$= \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

sehingga luas ΔABC = ½ bc Sin A

$$= \tfrac{1}{2}\, bc \times \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Rumus luas di atas, dapat digunakan apabila ketiga sisinya diketahui.

Contoh 6

Diketahui Δ PQR. Hitung luas Δ PQR Jika:

a. PQ = 1 cm, QR = 2 cm, dan PR = $\sqrt{3}$ cm.

b. PQ = 1 cm dan QR = 2 cm, besar $\angle$ PQR = 60^0.

c. Alas segitiga adalah $\sqrt{3}$ cm dan tingginya 1 cm.

Jawab:

a. s = ½ (PQ + QR + PR)

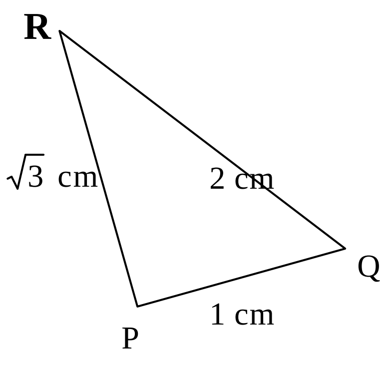
$$= \tfrac{1}{2}(1 + 2 + \sqrt{3}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$L\ \Delta\ PQR = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{4} x \frac{2}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$



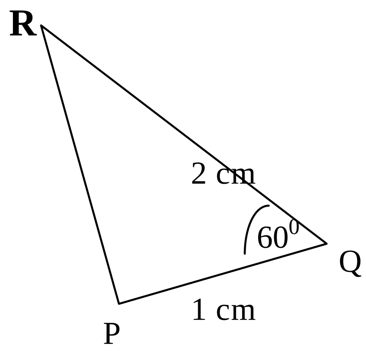
Jadi luas Δ PQR adalah $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ cm^2

b. L ?? PQR $= \frac{1}{2}$ x PQxQRx Sin ? PQR

$= \frac{1}{2}$ x 1x 2x Sin 60^0

$= 1 \times \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi luas ?? PQR adalah $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ cm^2

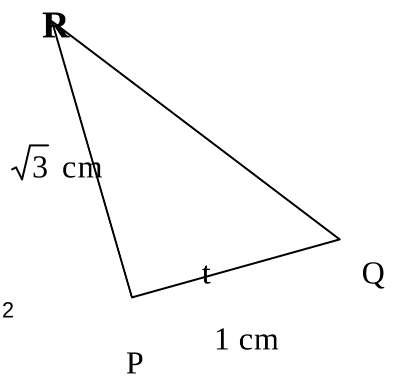


c. L ?? PQR = ½ alas x tinggi

= ½ x $\sqrt{3}$ x 1

$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi luas ?? PQR adalah $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ cm^2



c. Rangkuman 1

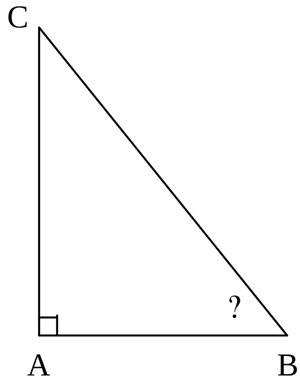
1) Sin ? $= \dfrac{\textit{sisi siku ? siku didepan sudut ?}}{\textit{sisi miring}} = \dfrac{AC}{BC}$

Cos ? $= \dfrac{\textit{sisi siku ? siku disamping sudut ?}}{\textit{sisi miring}} = \dfrac{AB}{BC}$

Tan ? $= \dfrac{\textit{sisi siku ? siku didepan sudut ?}}{\textit{sisi siku ? siku di samping sudut ?}} = \dfrac{AC}{AB}$

Ctg ? $= \dfrac{1}{tg\ ?} = \dfrac{1}{\frac{AC}{AB}} = \dfrac{AB}{AC}$

Sec ? $= \dfrac{1}{\cos\ ?} = \dfrac{1}{\frac{AB}{BC}} = \dfrac{BC}{AB}$



Cosec ? = $\frac{1}{\sin ?} = \frac{1}{\frac{AC}{BC}} = \frac{BC}{AC}$

2) Sistem koordinat kutub

x = r Cos ?

y = r Sin ?

dengan tan ? = $\frac{y}{x}$ dan r = $\sqrt{x^2 ? y^2}$

3) Aturan Sinus: $\frac{a}{\sin ?} = \frac{b}{\sin ?} = \frac{c}{\sin ?}$

4) Aturan Cosinus

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos ?$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos ?$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos ?$

5) Luas ?ABC = $\frac{1}{2}$ x bc x Sin A

Luas ?ABC = $\frac{1}{2}$ x ac x Sin B

Luas ?ABC = $\frac{1}{2}$ x ab x Sin C

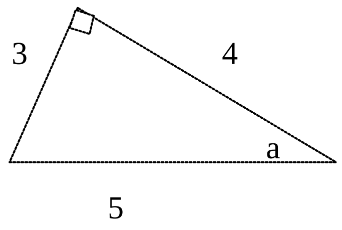
Luas ?ABC = $\sqrt{s(s ? a)(s ? b)(s ? c)}$, s setengah keliling segitiga

d. Tugas 1

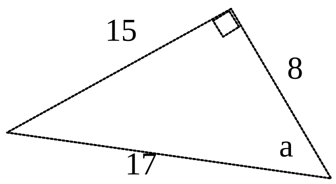
1. Tentukan nilai sin ? XOT, cos ? XOT dan tan ? XOT, jika koordinat titik T adalah sebagai berikut:
   a) T (3,4) c) T (-5,-10)
   b) T (-4,6) d) T (8,-6)
2. Diketahui suatu segitiga siku-siku. Panjang sisi miringnya adalah $3\sqrt{2}$ cm. Jika besar salah satu sudutnya 45^0, berapakah panjang sisi-sisi yang lain!

3. Tentukan perbandingan-perbandingan nilai sin a dan cos a, serta hitunglah tan a dari gambar berikut ini:

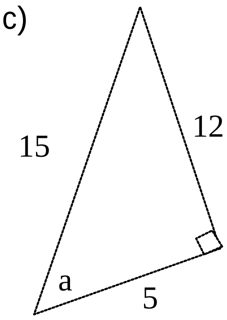
a)



b)



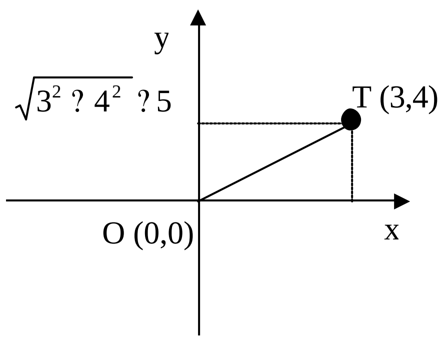
c)



4. Dari soal no.3 hitunglah luas masing-masing segitiga tersebut!

e. Kunci Tugas 1

1. a) r= $\sqrt{3^2 ? 4^2} ? 5$



sin ? XOT = $\frac{y}{r}$ = $\frac{4}{5}$

cos ? XOT = $\frac{x}{r}$ = $\frac{3}{5}$

tan ? XOT = $\frac{y}{x}$ = $\frac{4}{3}$

b) T (-4,6); x = -4 dan y = 6 maka r=$\sqrt{(?4)^2 ? (6)^2} ? \sqrt{52} ? 2\sqrt{13}$ sehingga diperoleh perbandingan trigonometri sebagai berikut:

sin ? XOT = $\frac{y}{r}$ = $\frac{6}{2\sqrt{13}} ? \frac{3}{\sqrt{13}}$

cos ? XOT = $\frac{x}{r}$ = $\frac{?4}{2\sqrt{13}} ? \frac{?2}{\sqrt{13}}$

tan ? XOT = $\frac{y}{x}$ = $\frac{6}{?\,4} ?\, ? \frac{3}{2}$

c) T(-5,10); x = -5 dan y = 10 maka r=$\sqrt{(?\,5)^2 \;?\; (10)^2} \;?\; \sqrt{116} \;?\; 2\sqrt{29}$ sehingga

diperoleh perbandingan trigonometri sebagai berikut:

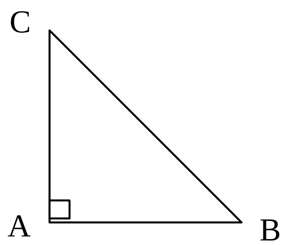
sin ? XOT = $\frac{y}{r}$ = $\frac{10}{2\sqrt{29}} \;?\; \frac{5}{\sqrt{29}}$

cos ? XOT = $\frac{x}{r}$ = $\frac{?\,5}{2\sqrt{29}} \;?\; ? \frac{5}{2\sqrt{29}}$

tan ? XOT = $\frac{y}{x}$ = $\frac{10}{?\,5} \;?\; ?\; 2$

d) ....(kerjakan mandiri)

2. Diketahui: misalkan ? ABC siku-siku seperti pada soal



? A = 90^0; ? B = 45^0; BC = $3\sqrt{2}$

Ditanya: panjang sisi-sisi yang lain!

Jawab:

Cara I: Karena jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180^0, maka besar ? C = $180^0 – 90^0 - 45^0 = 45^0$ =? B sehingga segitiga siku-siku tersebut juga merupakan segitiga sama kaki.

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$2AB^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$

$AB^2 = 9$

AB=AC = 3

Cara II: sin 45^0 = $\frac{AC}{BC}$? $\frac{AC}{3\sqrt{2}}$? AC = sin 45^0. $3\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}.3\sqrt{2}$ = 3

3. a) sin a = $\frac{3}{5}$; cos a = $\frac{4}{5}$; dan tan a = $\frac{3}{4}$

   b) sin a = $\frac{15}{17}$; cos a = $\frac{8}{17}$; dan tan a = $\frac{15}{8}$

   c) sin a = $\frac{12}{15}$? $\frac{4}{5}$; cos a = $\frac{5}{15}$? $\frac{1}{3}$; dan tan a = $\frac{12}{5}$

4. a) Luas masing-masing segitiga di atas dalam kasus ini, lebih mudah menggunakan perbandingan trigonometri yaitu setengah dikalikan sisi pertama dan kedua dikalikan sinus sudut yang diapit oleh kedua sisi tadi.

   Luas = ½. 5. 4. Sin a = ½. 5. 4. ($\frac{3}{5}$) = 6 satuan luas

   b) Luas = ½. 8. 17. Sin a = ½. 8. 17. ($\frac{15}{17}$) = 60 satuan luas

   c) Luas = ½. 5. 15. Sin a = ½. 5. 15. ($\frac{4}{5}$) = 30 satuan luas

f. Tes Formatif

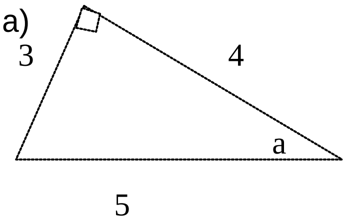
1. Tentukan nilai sin ? XOT, cos ? XOT dan tan ? XOT, jika koordinat titik T adalah sebagai berikut:

   a) T (3,4) c) T (-5,-10)
   b) T (-4,6) d) T (8,-6)

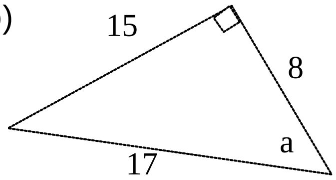
2. Diketahui suatu segitiga siku-siku. Panjang sisi miringnya adalah $3\sqrt{2}$ cm. Jika besar salah satu sudutnya 45^0, berapakah panjang sisi-sisi yang lain!

3. Tentukan perbandingan-perbandingan nilai sin a dan cos a, serta hitunglah tan a dari gambar berikut ini:

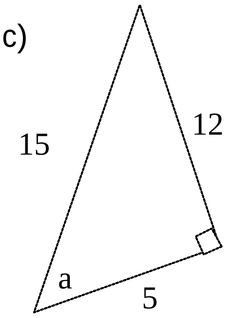
a)



b)



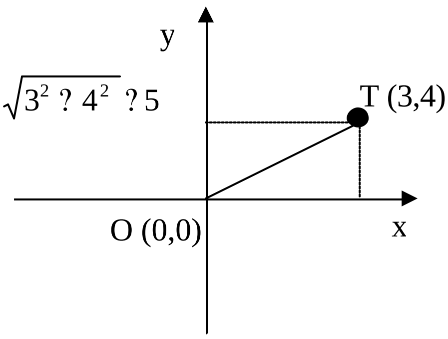
c)



4. Dari soal no.3 hitunglah luas masing-masing segitiga tersebut!
5. Jika tan ? = ½n, tentukanlah dari:
   a) sin ?
   b) cos ?
   c) tan ?

g. Kunci Tes Formatif

1. a) r= $\sqrt{3^2 ? 4^2} ? 5$



sin ? XOT = $\frac{y}{r} = \frac{4}{5}$

cos ? XOT = $\frac{x}{r} = \frac{3}{5}$

tan ? XOT = $\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$

   b) T (-4,6); x = -4 dan y = 6 maka r= $\sqrt{(?4)^2 ? (6)^2} ? \sqrt{52} ? 2\sqrt{13}$ sehingga diperoleh perbandingan trigonometri sebagai berikut:

   sin ? XOT = $\frac{y}{r} = \frac{6}{2\sqrt{13}} ? \frac{3}{\sqrt{13}}$

   cos ? XOT = $\frac{x}{r} = \frac{?4}{2\sqrt{13}} ? \frac{?2}{\sqrt{13}}$

tan ? XOT = $\frac{y}{x}$ = $\frac{6}{?\ 4}$? ? $\frac{3}{2}$

c) T (-5,10); x = -5 dan y = 10 maka r= $\sqrt{(?\,5)^2\ ?\ (10)^2}$? $\sqrt{116}$? $2\sqrt{29}$ sehingga diperoleh perbandingan trigonometri sebagai berikut:

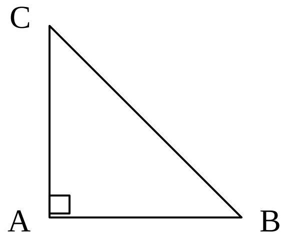
sin ? XOT = $\frac{y}{r}$ = $\frac{10}{2\sqrt{29}}$? $\frac{5}{\sqrt{29}}$

cos ? XOT = $\frac{x}{r}$ = $\frac{?\ 5}{2\sqrt{29}}$? ? $\frac{5}{2\sqrt{29}}$

tan ? XOT = $\frac{y}{x}$ = $\frac{10}{?\ 5}$? ? 2

d) ....(kerjakan mandiri)

2. Diketahui: misalkan ? ABC siku-siku seperti pada soal



? A = 90^0; ? B = 45^0; BC = $3\sqrt{2}$

Ditanya: panjang sisi-sisi yang lain!

<u>Jawab:</u>

Cara I: Karena jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180^0, maka besar ? C = 180^0 – 90^0 - 45^0 = 45^0 =? B sehingga segitiga siku-siku tersebut juga merupakan segitiga sama kaki.

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$2AB^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$

$AB^2 = 9$

AB=AC = 3

Cara II: sin 45^0 = $\frac{AC}{BC}$? $\frac{AC}{3\sqrt{2}}$? AC = sin 45^0. $3\sqrt{2}$

= $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,3\sqrt{2}$ = 3

3. a) sin a = $\frac{3}{5}$; cos a = $\frac{4}{5}$; dan tan a = $\frac{3}{4}$

b) sin a = $\frac{15}{17}$; cos a = $\frac{8}{17}$; dan tan a = $\frac{15}{8}$

c) sin a = $\frac{12}{15} ? \frac{4}{5}$; cos a = $\frac{5}{15} ? \frac{1}{3}$; dan tan a = $\frac{12}{5}$

4. a) Luas masing-masing segitiga di atas dalam kasus ini, lebih mudah menggunakan perbandingan trigonometri yaitu setengah dikalikan sisi pertama dan kedua dikalikan sinus sudut yang diapit oleh kedua sisi tadi.

   Luas = ½. 5. 4. Sin a = ½. 5. 4. ($\frac{3}{5}$) = 6 satuan luas

   b) Luas = ½. 8. 17. Sin a = ½. 8. 17. ($\frac{15}{17}$) = 60 satuan luas

   c) Luas = ½. 5. 15. Sin a = ½. 5. 15. ($\frac{4}{5}$) = 30 satuan luas.

2. Kegiatan Belajar 2

a. Tujuan Kegiatan pembelajaran

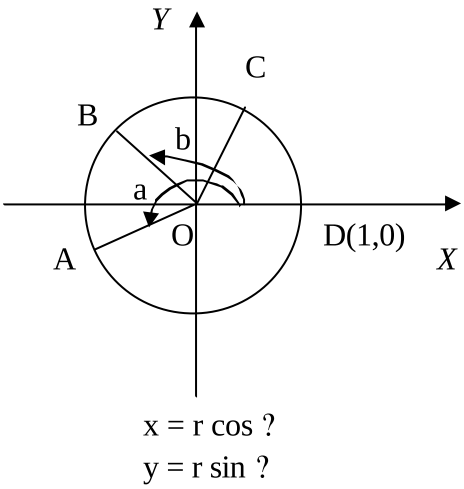
Setelah mempelajari kegiatan belajar 2, diharapkan anda dapat:

- ✍ Menemukan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut serta menggunakannya untuk menyelesaikan masalah
- ✍ Membuktikan identitas trigonometri seperti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- ✍ Memahami bentuk-bentuk persamaan trigonometri serta dapat menyelesaikan persamaan trigonometri tersebut.

b. Uraian Materi

1) Rumus Trigonometri Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Menemukan Rumus Cos (a-b) dan cos (a + b)



Diberikan suatu lingkaran yang berpusat di titik asal dengan jari-jari 1 satuan.

Dibuat titik D (1,0) dalam koordinat kutub, maka koordinat cartesius titik itu juga sama yaitu (1,0). Dibuat titik B (1,b) dalam koordinat kutub, maka koordinat cartesius titik itu adalah (cos b, sin b). Dibuat titik A (1, a) di mana a > b dalam koordinat kutub, maka koordinat cartesius titik itu adalah (cos a, sin a).

Dari gambar di atas, dapat diketahui besar ? AOB adalah a-b. Oleh karena itu, dapat dibuat suatu titik C sedemikian hingga membentuk sudut a-b terhadap sumbu X positif, yaitu dengan koordinat (1,a-b) dalam koordinat cartesius sehingga koordinat cartesiusnya adalah (cos (a-b), sin (a-b)).

Karena besar $\angle$AOB = $\angle$COD = a-b yang keduanya merupakan sudut pusat lingkaran, maka panjang busur AB = panjang busur CD akibatnya AB = CD. Dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik, kita dapat menghitung panjang AB dan DC.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2}$$

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$$

$$= \sqrt{(1 - \cos(a - b))^2 + (0 - \sin(a - b))^2}$$

Oleh karena AC = AB, maka diperoleh:

$$\sqrt{(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2} = \sqrt{(1 - \cos(a - b))^2 + (0 - \sin(a - b))^2}$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas, didapat:

$(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 = [1-\cos(a - b)]^2 + [0 - \sin(a - b)]^2$

Dengan menguraikan ruas kiri dari persamaan di atas:

$(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2$

$= (\cos^2 b - 2\cos b.\cos a + \cos^2 a) + (\sin^2 b - 2\sin b.\sin a + \sin^2 a)$

$= (\cos^2 b + \sin^2 b) + (\cos^2 a + \sin^2 a) - 2\cos b.\cos a - 2\sin b.\sin a$

$= (1) + (1) - 2(\cos b.\cos a + \sin b.\sin a)$

$= 2 - 2(\cos b.\cos a + \sin b.\sin a)$ ....(1)

Dengan menguraikan ruas kanan dari persamaan yang sama:

$[1-\cos(a - b)]^2 + [0 - \sin(a - b)]^2$

$= [1 - 2\cos(a - b) + \cos^2(a - b)] + [\sin^2(a - b)]$

$= 1 - 2\cos(a - b) + \cos^2(a - b) + \sin^2(a - b)$

$= 1 - 2\cos(a - b) + 1$

$= 2 – 2 \cos (a - b)$ ....(2)

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh:

$2 – 2(\cos b.\cos a + \sin b.\ \sin a) = 2 – 2 \cos (a - b)$

$2(\cos b.\cos a + \sin b.\ \sin a) = – 2 \cos (a - b)$

$\cos b.\cos a + \sin b.\ \sin a = \cos (a - b)$

Sehingga diperoleh rumus cosinus selisih dua sudut, yaitu:

$$\boxed{\cos (a - b) = \cos a.\cos b + \sin a.\ \sin b}$$

Dengan mensubtitusi b = -b pada rumus di atas, diperoleh:

$\text{Cos } (a –(-b)) = \cos a.\cos (-b) + \sin a.\ \sin (-b)$

$\text{Cos } (a + b) \quad = \cos a.\cos b + \sin a.\ (-\sin b),$

karena $\cos (-b) = \cos b$ dan $\sin (-b) = -\sin b$, maka didapat

$\text{Cos } (a + b) = \cos a.\ \cos b - \sin a.\ \sin b$

Sehingga diperoleh rumus cosinus jumlah dua sudut, yaitu:

$$\boxed{\cos (a + b) = \cos a.\cos b - \sin a.\ \sin b}$$

Contoh 1

1. Hitunglah nilai cosinus sudut di bawah ini menggunakan rumus cosinus jumlah atau selisih dua sudut!
   a. 75^0
   b. 15^0

   Jawab:

   a. Ingat: $75^0 = 45^0 + 30^0$

   $\cos 75^0 = \cos (45^0 + 30^0) = \cos 45^0.\cos 30^0 - \sin 45^0.\ \sin 30^0$

   $$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sqrt{6}\right) - \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

b. Ingat: $15^0 = 45^0 - 30^0$

$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) = \cos 45^0.\cos 30^0 + \sin 45^0.\ \sin 30^0$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sqrt{6}\right) + \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

Contoh 2

Buktikan persamaan trigonometri di bawah ini berlaku, dengan menggunakan rumus cosinus jumlah atau selisih dua sudut!

a. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

b. $\cos(x + \pi) = -\cos x$

Jawab:

a. Ingat: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos\frac{\pi}{2}.\cos x + \sin\frac{\pi}{2}.\ \sin x$

$= 0.\ \cos x + 1.\ \sin x$

$= -\ \sin x$

b. Ingat: $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$

$\cos(x + \pi) = \cos x.\cos \pi\ .\ - \sin x.\ \sin \pi$

$= \cos x\,(-1) - \sin x.\ 0$

$= -\cos x$

Contoh 3

Hitunglah menggunakan rumus cosinus jumlah atau selisih dua sudut!

a. cos 2?

b. cos 0

Jawab:

a. Ingat: 2? = ? + ?

$\cos 2? = \cos (? + ?) = \cos ?.\cos ? - \sin ?.\sin ?$

$= \cos^2 ? - \sin^2 ?$

Karena $\sin^2 ? + \cos^2 ? = 1$, maka:

$\cos 2? = (1 - \sin^2 ?) - \sin^2 ? = 1 - 2\sin^2 ?$; atau

$\cos 2? = \cos^2 ? - (1 - \cos^2 ?) = 2\cos^2 ? - 1$

sehingga kita mendapat rumus:

$$\boxed{\cos 2? = \cos^2 ? - \sin^2 ? = 1 - 2\sin^2 ? = 2\cos^2 ? - 1}$$

b. Ingat: 0 = ? - ?

$\cos 0 = \cos (? - ?) = \cos ?.\cos ? + \sin ?.\sin ?$

$= \cos^2 ? + \sin^2 ?$

$= 1$ ....karena $\sin^2 ? + \cos^2 ? = 1$

Menemukan Rumus sin (a ? b)

Diketahui $\sin ? = \cos (90^0 - ?)$,

misalkan ? = a + b maka:

$\text{Sin}(a + b) = \cos [90^0 - (a+b)]$

$= \cos [(90^0 - a) - b]$

$= \cos (90^0 - a) \cos b + \sin (90^0 - a) \sin b$

$= \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Sehingga diperoleh rumus sinus jumlah dua sudut, yaitu:

$$\boxed{\text{Sin}(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

Dengan mensubtitusi b = -b pada rumus di atas, diperoleh:

Sin (a +(- b)) = sin a cos (-b) + cos a sin (-b)

Sin (a – b) = sin a cos b + cos a (-sin b) ....karena cos (-b) = cos b dan sin (-b) = -sin b

= sin a cos b - cos a sin b

Sehingga diperoleh rumus sinus selisih dua sudut, yaitu:

Sin (a - b) = sin a cos b - cos a sin b

Contoh 4

Hitunglah nilai sinus sudut di bawah ini menggunakan rumus cosinus jumlah atau selisih dua sudut!

a. 75^0

b. 15^0

Jawab:

a. Ingat: $75^0 = 45^0 + 30^0$

sin 75^0 = sin ($45^0 + 30^0$) = sin 45^0.cos 30^0 + cos 45^0. sin 30^0

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sqrt{6}\right) + \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

b. Ingat: $15^0 = 45^0 - 30^0$

sin 15^0 = sin ($45^0 - 30^0$) = sin 45^0.cos 30^0 - cos 45^0. sin 30^0

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sqrt{6}\right) - \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

Contoh 5

Buktikan persamaan trigonometri di bawah ini berlaku, dengan menggunakan rumus sinus jumlah atau selisih dua sudut!

a. $\sin (\frac{?}{2} - x) = \cos x$

b. $\sin (x + ?) = - \cos x$

Jawab:

a. Ingat: $\cos \frac{?}{2} = 0$, $\sin \frac{?}{2} = 1$

$$\sin (\frac{?}{2} - x) = \sin \frac{?}{2} . \cos x - \cos \frac{?}{2} . \sin x$$
$$= 1. \cos x - 0. \sin x$$
$$= \cos x$$

b. Ingat: $\cos ? = -1$, $\sin ? = 0$

$$\sin (x + ?) = \sin x . \cos ? + \cos x . \sin ?$$
$$= \sin x (-1) + \cos x . 0$$
$$= - \sin x$$

Contoh 6

Hitunglah menggunakan rumus sinus jumlah atau selisih dua sudut!

a. $\sin 2?$

b. $\sin 0$

Jawab:

a. Ingat: $2? = ? + ?$

$$\sin 2? = \sin (? + ?) = \sin ? . \cos ? + \cos ? . \sin ?$$
$$= \sin ? . \cos ? + \sin ? . \cos ?$$
$$= 2 \sin ? . \cos ?$$

sehingga kita mendapat rumus:

$$\boxed{\sin 2? = 2 \sin ? . \cos ?}$$

b. Ingat: 0 = ? - ?

sin 0 = sin (? - ?) = sin ? .cos ? - cos ? . sin ?

= sin ? .cos ? - sin ? . cos ?

= 0

Menentukan Rumus Tan (a ? b)

Pada bab yang lalu, kita sudah mempelajari bersama rumus jumlah atau selisih dua sudut untuk sinus dan cosinus. Rumus-rumus tersebut digunakan kembali untuk mencari rumus tangen (a ? b), pada proses berikut.

Tan (a – b) $= \dfrac{\sin (a ? b)}{\cos (a ? b)}$

$= \dfrac{\sin a \cos b ? \cos a \sin b}{\cos a \cos b ? \sin a \sin b}$

$= \dfrac{\dfrac{\sin a \cos b ? \cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b ? \sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$; pembilang dan penyebut dibagi cos a.cos b

$= \dfrac{\dfrac{\sin a}{\cos a} ? \dfrac{\sin b}{\cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} ? \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$

$= \dfrac{\tan a ? \tan b}{1 ? \tan a \tan b}$

sehingga kita memperoleh rumus tangen selisih dua sudut, yaitu:

$$\boxed{\tan (a - b) = \dfrac{\tan a ? \tan b}{1 ? \tan a \tan b}}$$

Dengan mengganti b = -b pada rumus di atas, kita akan memperoleh rumus tangen jumlah dua sudut seperti berikut ini.

tan (a – (-b)) $= \dfrac{\tan a ? \tan (?b)}{1 ? \tan a \tan (?b)}$

tan (a + b) $= \dfrac{\tan a ? \tan b}{1 ? \tan a \tan b}$; karena tan (-a) = tan a dan tan (-b) = tan b.

sehingga kita memperoleh rumus tangen jumlah dua sudut, yaitu:

$$\boxed{\tan (a + b) = \frac{\tan a ? \tan b}{1 ? \tan a \tan b}}$$

Contoh 7

Hitunglah nilai tangen sudut di bawah ini menggunakan rumus tangen jumlah atau selisih dua sudut!

c. 75^0

d. 15^0

Jawab:

a. Ingat: $75^0 = 45^0 + 30^0$

$$\tan 75^0 = \tan (45^0 + 30^0) = \frac{\tan 45^0 ? \tan 30^0}{1 ? \tan 45^0 \tan 30^0}$$

$$= \frac{1 ? \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 ? 1.\frac{1}{3}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\frac{3 ? \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 ? \sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{3 ? \sqrt{3}}{3 ? \sqrt{3}} \text{ x } \frac{3 ? \sqrt{3}}{3 ? \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3 ? \sqrt{3})^2}{9 ? 3}$$

$$= \frac{9}{6} ? \frac{3}{6} ? \frac{6\sqrt{3}}{6}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

b. Ingat: $15^0 = 45^0 - 30^0$

$$\text{Tan } 15^0 = \tan(45^0 - 30^0) = \frac{\tan 45^0 ? \tan 30^0}{1 ? \tan 45^0 \tan 30^0}$$

$$= \frac{1 ? \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 ? 1.\frac{1}{3}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\frac{3 ? \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 ? \sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{3 ? \sqrt{3}}{3 ? \sqrt{3}} \text{ x } \frac{3 ? \sqrt{3}}{3 ? \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3 ? \sqrt{3})^2}{9 ? 3}$$

$$= \frac{9}{6} ? \frac{3}{6} ? \frac{6\sqrt{3}}{6}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

Contoh 8

Buktikan persamaan trigonometri di bawah ini berlaku, dengan menggunakan rumus tangen jumlah atau selisih dua sudut!

a. tan (-x) = - tan x

b. tan (x + ?) = tan x

Jawab:

a. Ingat: tan 0 = 0, -x = 0 - x

$$\tan(0\text{-}x) = \frac{\tan 0^0 ? \tan x}{1 ? \tan 0^0 \tan x}$$

$$= \frac{0 ? \tan x}{1 ? 0.\tan x}$$

$$= -\tan x$$

b. Ingat: tan ? = 0,

$$\tan (x + ?) = \frac{\tan x ? \tan ?}{1 ? \tan x \tan ?}$$

$$= \frac{\tan x ? 0}{1 ? \tan x . 0}$$

$$= \tan x$$

Contoh 9

Hitunglah menggunakan rumus tangen jumlah atau selisih dua sudut!

a. tan 2?

b. tan 0

Jawab:

a. Ingat: 2? = ? + ?

tan 2? = tan (? + ?)

$$= \frac{\tan a ? \tan a}{1 ? \tan a \tan a}$$

$$= \frac{2 \tan a}{1 ? \tan^2 a}$$

sehingga kita mendapat rumus:

$$\boxed{\tan 2? = \frac{2 \tan a}{1 ? \tan^2 a}}$$

b. Ingat: 0 = ? - ?

$$\tan 0 = \tan (? - ?) = \frac{\tan ? ? \tan ?}{1 ? \tan ? \tan ?}$$

$$= \frac{0}{1 ? \tan^2 ?}$$; andaikan nilai $\tan^2$? terdefinisi, maka

$$= 0$$

2) Pengembangan Rumus Jumlah Dan Selisih Dua Sudut

Dari beberapa rumus pada pembelajaran 1 dapat kita turunkan beberapa rumus baru diantaranya sebagai berikut:

Dengan menjumlahkan sin (x + y) dan sin (x – y), kita memperoleh:

$$\begin{array}{l} \text{Sin } (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \underline{\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y} \; + \\ \sin (x + y) + \sin (x - y) = 2 \sin x \cos y \end{array}$$

Sedangkan apabila sin (x+ y) dikurangi sin (x – y), kita memperoleh:

$$\begin{array}{l} \text{Sin } (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \underline{\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y} \; - \\ \sin (x + y) - \sin (x - y) = 2 \cos x \sin y \end{array}$$

Dengan menjumlahkan cos (x + y) dan cos (x – y), kita memperoleh:

$$\begin{array}{l} \cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \underline{\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y} \; + \\ \cos (x + y) + \cos (x - y) = 2 \cos x \cos y \end{array}$$

Sedangkan apabila cos (x+ y) dikurangi cos (x – y), kita memperoleh:

$$\begin{array}{l} \cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \underline{\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y} \; - \\ \cos (x + y) - \cos (x - y) = -2 \sin x \sin y \end{array}$$

Dari penurunan di atas kita mendapatkan 4 rumus yaitu:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin (x + y) + \sin (x - y) = 2 \sin x \cos y \\ \sin (x + y) - \sin (x - y) = 2 \cos x \sin y \\ \cos (x + y) + \cos (x - y) = 2 \cos x \cos y \\ \cos (x + y) - \cos (x - y) = -2 \sin x \sin y \end{array}}$$

Misalkan:

$$\begin{array}{ll} A = x + y & A = x + y \\ \underline{B = x - y} \; + & \underline{B = x - y} \; - \\ A + B = 2x & (A - B) = 2y \\ \tfrac{1}{2} (A + B) = x & \tfrac{1}{2} (A - B) = y \end{array}$$

Sehingga keempat rumus tadi dapat dituliskan sebagai berikut:

sin A + sin B = 2 sin ½ (A + B) cos ½ (A – B)
sin A - sin B = 2 cos ½ (A + B) sin ½ (A – B)
cos A + cos B = 2 cos ½ (A + B) cos ½ (A – B)
cos A - cos B = -2 sin ½ (A + B) sin ½ (A – B)

Contoh 10

Jika $x = 105^0$; $y = 15^0$.Tentukan:

a) sin x + sin y b) sin x – sin y

c) cos x + cos y d) cos x – cos y

Jawab:

a) $\sin 105^0 + \sin 15^0 = 2 \sin ½ (105^0 + 15^0) \cos ½ (105^0 - 15^0)$

$= 2 \text{ Sin } ½ (120^0) \cos ½ (90^0)$

$= 2 \text{ Sin } 60^0 \cos 45^0$

$= 2 (\frac{1}{2}\sqrt{3}).(\frac{1}{2}\sqrt{2}).$

$= \frac{1}{2}\sqrt{6}$

b) $\sin 105^0 - \sin 15^0 = 2 \cos ½ (105^0 + 15^0) \sin ½ (105^0 - 15^0)$

$= 2 \cos ½ (120^0) \sin ½ (90^0)$

$= 2 \cos 60^0 \sin 45^0$

$= 2 (\frac{1}{2}).(\frac{1}{2}\sqrt{2}).$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $\cos 105^0 + \cos 15^0 = 2 \cos ½ (105^0 + 15^0) \cos ½ (105^0 - 15^0)$

$= 2 \cos ½ (120^0) \cos ½ (90^0)$

$= 2 \cos 60^0 \cos 45^0$

$= 2 (\frac{1}{2}).(\frac{1}{2}\sqrt{2}).$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

d) $\cos 105^0 - \cos 15^0 = -2 \sin ½ (105^0 + 15^0) \sin ½ (105^0 - 15^0)$

$= -2 \text{ Sin } ½ (120^0) \sin ½ (90^0)$

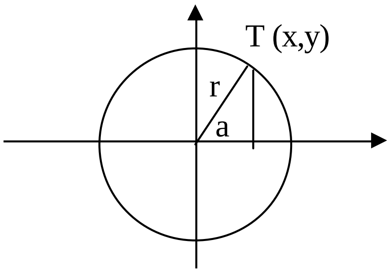
$= -2 \text{ Sin } 60^0 \sin 45^0$

$= -2 (\frac{1}{2}\sqrt{3}).(\frac{1}{2}\sqrt{2}).$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{6}$

3) Identitas Trigonometri

Sebelum kita lebih jauh dalam membahas identitas trigonometri, kita ingat kembali identitas dasar, yaitu:



Sec a = $\frac{1}{\cos a} = \frac{r}{x}$; Cosec a = $\frac{1}{\sin a} = \frac{r}{y}$; cotan a = $\frac{1}{\tan a} = \frac{x}{y}$

Atau cotan a = $\frac{\cos a}{\sin a}$

$\text{Sin}^2 a + \cos^2 a = (\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = \frac{y^2 ? x^2}{r^2} = \frac{r}{r} = 1$

$1 + \tan^2 a = 1 + (\frac{y}{x})^2 = \frac{x^2 ? y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} = (\frac{1}{\cos a})^2 = \text{Sec}^2 a$

$1 + \text{cotan}^2 a = 1 + (\frac{x}{y})^2 = \frac{y^2 ? x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} = (\frac{1}{\sin a})^2 = \text{cosec}^2 a$

Dengan dasar rumus identitas dasar di atas dan rumus-rumus trigonometri yang dahulu, kita pakai untuk membuktikan identitas trigonometri. Untuk lebih mempermudah dalam pembuktian identitas trigonometri hendaknya kita ikuti salah satu dari langkah-langkah berikut ini:

Langkah I:

Turunkan salah satu ruas dari persamaan yang dipandang lebih komplek menggunakan rumus-rumus yang telah ada sebelumnya, sehingga menghasilkan bentuk yang sama dengan ruas yang lain.

Langkah II:

Turunkan kedua ruas persamaan secara bersama-sama dan hendaknya dilakukan dalam tempat terpisah untuk menghindari kekeliruan, sedemikian hingga nantinya akan memperoleh bentuk yang sama.

<u>Contoh 11</u>

Buktikan identitas trigonometri berikut ini:

a) $\cos (a + b) \cos (a – b) = \cos^2 a + \sin^2 b$

b) $\text{cosec } (a + b) = \dfrac{\text{cosec } a..\text{cosec } b}{\text{cotan } a \text{ ? } \text{cotan } b}$

c) Jika diberikan ?ABC siku-siku di C, berlaku cos A. Cos B = ½, buktikan bahwa cos (A – B) = 1

<u>Jawab:</u>

a) $\cos (a + b) \cos (a – b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

Dengan menurunkan ruas kiri dari persamaan di atas, didapat;

(cos a. cos b – sin a. sin b). (cos a. cos b + sin a.sin b)

$= (\cos a. \cos b)^2 – (\sin a. \sin b)^2$

$= \cos^2 a. \cos^2 b – \sin^2 a. \sin^2 b$

$= \cos^2 a. (1-\sin^2 b) – (1-\cos^2 a). \sin^2 b$

$= \cos^2 a - \cos^2 a. \sin^2 b - \sin^2 b + \cos^2 a. \sin^2 b$

$= \cos^2 a – \sin^2 b$. karena sama dengan ruas kanan, maka identitas trigonometri di atas terbukti.

b) $\text{cosec } (a + b) = \dfrac{\text{cosec } a..\text{cosec } b}{\text{cotan } a \text{ ? } \text{cotan } b}$

Dengan menurunkan ruas kanan persamaan trigonometri di atas, kita memperoleh:

$$\frac{\text{cosec}\,a..\text{cosec}\,b}{\text{cotan}\,a\ ?\ \text{cotan}\,b} = \frac{\frac{1}{\sin a}.\frac{1}{\sin b}}{\frac{\cos a}{\sin a}\ ?\ \frac{\cos b}{\sin b}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin a.\sin b}}{\frac{\cos a \sin b\ ?\ \cos b \sin a}{\sin a.\sin b}}$$

$$= \frac{1}{\cos a \sin b\ ?\ \sin a \cos b}$$

$$= \frac{1}{\sin a \cos b\ ?\ \cos a \sin b}$$

$$= \frac{1}{\sin\,(a\ ?\ b)}$$

= cosec (a + b) terbukti

c) Diket: ?ABC siku-siku di C, berlaku cos A. Cos B = ½, buktikan bahwa cos (A – B) = 1.

Bukti:

A + B + C = 180^0, karena ?ABC segitiga siku-siku dengan sudut siku di titik C, maka A + B = 90^0.

Cos (A + B) = cos A.cos B – sin A. sin B

Cos 90^0= ½ - sin A. sin B

a.= ½ - sin A. sin B

sin A. sin B = ½

Sehingga:

Cos (A – B) = cos A.cos B + sin A. sin B

= ½ + ½

= 1. terbukti

4) Persamaan Trigonometri

Menyelesaikan persamaan trigonometri bentuk sin x = a; cos x = b dan tan x = c

Misalkan: sin ? = a; andaikan a suatu bilangan real positif dimana 0 ? a ? 1, maka sudut ? yang memenuhi ada di kuadran I dan II atau perputarannya.

Sin x = sin ?

X_1 = ? + k. 360^0; di mana k bilangan bulat

X_2 = (180^0-?) + k. 360^0

Contoh 12

Tentukan penyelesaian dari persamaan di bawah ini:

a) Sin x = ½ ; untuk 0< x < 360^0

b) Sin 2x = ½ ; untuk 0< x < 360^0

Jawab:

a) Sin x = ½

Sin x = sin 30^0

Sehingga:

X_1 = 30^0 + k. 360^0	x_2 = (180^0 - 30^0) + k. 360^0
k = 0, maka x_1 = 30^0	x_2 = 150^0 + k. 360^0
k = 1, maka x_1 = 390^0 (TM)	k = 0, maka x_2 = 150^0
catat: TM= tidak memenuhi	k = 1, maka x_2 = 510^0 (TM)

Jadi penyelesaiannya adalah: { 30^0, 150^0}

b) Sin 2x = ½

Sin 2x = sin 30^0

Sehingga:

$2X_1$ = 30^0 + k. 360^0	$2x_2$ = (180^0 - 30^0) + k. 360^0
k = 0, maka x_1= 30^0/2= 15^0	$2x_2$ = 150^0 + k. 360^0
k = 1, maka x_1= 390^0/2= 195^0	k = 0, maka x_2=150^0/2= 75^0
k = 2, maka x_1 = 750^0/2= 375^0 (TM)	k =1, maka x_2=510^0/2= 255^0
	k =2,makax_2=870^0/2=435^0 (TM)

Jadi penyelesaiannya adalah: { 15^0,75^0, 195^0, 225^0}

Misalkan: cos ? = b, andaikan b suatu bilangan real positif dimana 0 ? b ? 1, maka sudut ? berada di kuadran I dan IV atau perputarannya.

cos x = b

cos x = cos ?

X_1 = ? + k. 360^0; di mana k bilangan bulat

X_2 = -? + k. 360^0

Contoh13

Tentukan penyelesaian dari persamaan di bawah ini:

a) Cos x = ½ ; untuk 0< x < 360^0

b) Cos 2x = ½ ; untuk 0< x < 360^0

Jawab:

a) Cos x = ½

cos x = cos 60^0

Sehingga:

$X_1 = 60^0 + k.\ 360^0$
k = 0, maka $x_1 = 60^0$
k = 1, maka $x_1 = 420^0$ (TM)

$x_2 = (180^0 - 60^0) + k.\ 360^0$
$x_2 = 120^0 + k.\ 360^0$
k = 0, maka $x_2 = 120^0$
k= 1, maka $x_2 = 480^0$ (TM)

Jadi penyelesaiannya adalah: { 60^0, 120^0}

b) cos 2x = ½ ....(kerjakan sendiri)

Misalkan: tan ? = c, andaikan c suatu bilangan real positif, maka sudut ? berada di kuadran I dan III atau perputarannya.

tan x = c

tan x = tan ?

X_1 = ? + k. 360^0; di mana k bilangan bulat

X_2 = (180^0 + ?) + k. 360^0

= ? + 180^0 + k. 360^0

sehingga penyelesaiannya sama saja dengan x = ? + k. 180^0

Contoh 14

Tentukan penyelesaian dari persamaan di bawah ini:

a) tan x = 1; untuk $0 < x < 360^0$

b) tan 2x = 1; untuk $0 < x < 360^0$

Jawab:

a) tan x = 1

tan x = tan 45^0

Sehingga:

X = 45^0 + k. 180^0

k = 0, maka x = 45^0

k = 1, maka x = 225^0

k = 2,maka x = 405^0 (TM)

Jadi penyelesaiannya adalah: { 45^0, 225^0}

b) tan 2x = 1.............(kerjakan sendiri)

Menyelesaikan persamaan trigonometri bentuk a cos x+b sin x = k cos (x-?)

Pada rumus di muka telah diberikan rumus nilai cosinus dari selisih dua sudut, yaitu:

Cos (x - ?) = cos x cos ? + sin x sin ?

Misalkan: cos ? = a dan sin ? = b, maka $\cos^2 ? + \sin^2 ? = a^2 + b^2 = 1$

Sehingga persamaan di atas menjadi;

$\sqrt{a^2 ? b^2}$ Cos (x - ?) = cos x.a + sin x. b

k cos (x - ?) = a. cos x + b sin x; dimana k = $\sqrt{a^2 ? b^2}$

dengan tan ? = $\frac{\sin ?}{\cos ?} = \frac{b}{a}$; di mana letak sudut ? sebagai berikut.

? di kuadran I, jika a>0 dan b>0

? di kuadran II, jika a<0 dan b>0

? di kuadran III, jika a<0 dan b<0

? di kuadran IV, jika a>0 dan b<0

misalkan: k cos (x - ?) = c, maka persamaan di atas menjadi:

c = a. cos x + b sin x

Jadi penyelesaian bentuk a cos x + b sin x = k cos (x - ?) adalah penyelesaian dari k cos (x - ?) = c

Contoh 15

Tentukan penyelesaian dari: Cos x + $\sqrt{3}$ sin x = 1, jika 0< x < 360^0!

Jawab:

k = $\sqrt{?1?^? ? ?\sqrt{3}?^?}$ = $\sqrt{1?3}$ = $\sqrt{4}$ = 2

Tan ? = $\frac{\sqrt{3}}{1}$ = $\sqrt{3}$, maka ? ada di kuadran I karena $\sqrt{3}$ >0 dan 1>0

Sehingga:

? = 45^0

Akibatnya persamaan di atas, menjadi:

Cos x + $\sqrt{3}$ sin x = 1= 2 cos (x - 45^0)

? 2 cos (x - 45^0) = 1

? cos (x - 45^0) = ½

? cos (x – 45^0) = cos 60^0

x_1 – 45^0 = 60^0 + n. 360^0; di mana n bilangan bulat.

x_1 = 105^0 + n. 360^0

n = 0, maka x_1 = 105^0

n = 1, maka x_1 = 465^0 (tidak mungkin, mengapa?); atau

x_1 – 45^0 = -60^0 + n. 360^0; di mana n bilangan bulat.

x_1 = -15^0 + n. 360^0

n = 0, maka x_2 = -15^0 (tidak mungkin, mengapa?)

n = 1, maka x_2 = 345^0

Himpunan penyelesaiannya adalah: { 105^0, 345^0}

c. Rangkuman 2

1) $\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

   $\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

   $\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

   $\sin (a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

2) $\sin (x + y) + \sin (x - y) = 2 \sin x \cos y$

   $\sin (x + y) - \sin (x - y) = 2 \cos x \sin y$

   $\cos (x + y) + \cos (x - y) = 2 \cos x \cos y$

   $\cos (x + y) - \cos (x - y) = -2 \sin x \sin y$.

3) $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A - B)$

   $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2} (A + B) \sin \frac{1}{2} (A - B)$

   $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A - B)$

   $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2} (A + B) \sin \frac{1}{2} (A - B)$

4) Untuk menyelesaiakn identitas trigonometri dilakukan dengan langkah turunkan salah satu ruas dari persamaan yang dipandang lebih komplek menggunakan rumus-rumus yang telah ada sebelumnya, sehingga menghasilkan bentuk yang sama dengan ruas yang lain.

5) Penyelesaian bentuk $a \cos x + b \sin x = k \cos (x - ?)$ adalah penyelesaian dari $k \cos (x - ?) = c$.

d. Tugas 2

1. Hitunglah nilai dari cosinus dari sudut berikut:
    a) $22,5^0$
    b) $67,5^0$
2. Jika tan ? = n, tentukanlah dari:
    a. sin 2?
    b. tan ½?
3. Tentukan penyelesaian persamaan trigonometri berikut ini:
    a. cos ½x = ½ ; untuk $0 \leq x \leq 360^0$
    b. cos x – sin x = 1; untuk $0 \leq x \leq 360^0$

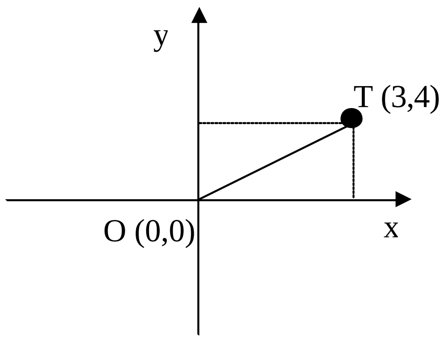
e. Kunci Jawaban Tugas 2

1. a) $\cos 45^0 = 2\cos^2 22,5^0 - 1$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2\cos^2 22,5^0 - 1$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 = 2\cos^2 22,5^0$

$(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1)/2 = \cos^2 22,5^0$



$\cos^2 22,5^0 = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2} ? 2}{2}}{2}} ? \sqrt{\frac{\sqrt{2} ? 2}{4}} ? \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2} ? 2}{2}}$

b) $\sin 45^0 = 1 - 2\sin^2 22,5^0$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 - 2\sin^2 22,5^0$

$2\sin^2 22,5^0 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin^2 22,5^0 = (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})/2$

$$\sin^2 22{,}5^0 = \sqrt{\frac{\frac{2 ? \sqrt{2}}{2}}{2}} ? \sqrt{\frac{2 ? \sqrt{2}}{4}} ? \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 ? \sqrt{2}}{2}}$$

2. tan ? = n = $\frac{y}{x}$; sehingga x= 1 dan y = n.

r = $\sqrt{1^2 ? n^2} ? \sqrt{n^2 ? 1^2}$

sin ? = $\frac{y}{r} ? \frac{n}{\sqrt{n^2 ? 1}}$; cos ? = $\frac{x}{r} ? \frac{1}{\sqrt{n^2 ? 1}}$

sin 2? = 2 sin ? . cos ? = 2 $\frac{n}{\sqrt{n^2 ? 1}} . \frac{1}{\sqrt{n^2 ? 1}} = \frac{2n}{n^2 ? 1}$

sin ½ ? =....? Cos ? = 1- 2sin^2 ?

$\frac{1}{\sqrt{n^2 ? 1}}$ = 1- 2sin^2 ?

2 sin^2 ? = 1- $\frac{1}{\sqrt{n^2 ? 1}}$

sin^2 ? = $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n^2 ? 1}}$? sin ? = $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n^2 ? 1}}}$

3. a) cos ½ x = ½ ; 0 ? x ? 360^0

cos ½ x = cos 60^0

½ x = 60^0

x_1 = 120^0 + k.360^0 x_2 = -120^0 + k.360^0

k=0? x_1 = 120^0 k=0? x_2 = -120^0 (TM)

k=1? x_1 = 480^0(TM/tidak termasuk) k=1? x_2 = 240^0

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {120^0,240^0}

b) cos x –sin x = 1 ; 0 ? x ? 360^0

k = $\sqrt{a^2 ? b^2} ? \sqrt{(1)^2 ? (?1)^2} ? \sqrt{1 ? 1} ? \sqrt{2}$

tan ? = $\frac{b}{a} = \frac{?1}{1} ? ?1$

? = 135^0 (KW IV)

sehingga: k cos (x-?) = 1

$\sqrt{2}$ cos (x-135^0) = 1

cos (x-135^0) = $\frac{1}{\sqrt{2}} ? \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos(x-135^0) = \cos 45^0$

$x_1-135^0 = 45^0 + k.360^0$	$x_1-135^0 = -45^0 + k.360^0$
$x_1 = 360^0 + k.360^0$	$x_1 = 90^0 + k.360^0$
untuk k=-1? $x_1 = 0^0$	k=-1? $x_1 = 270^0$
k= 0? $x_1 = 360^0$	k= 0? $x_1 = 90^0$
k=1? $x_1 = 720^0$ (TM)	k=1? $x_1 = 450^0$ (TM)

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{0^{0,}90^0, 270^0,360^0\}$

f. Tes Formatif

1. Tulislah rumus trigonometri sudut jumlah atau selisih dari soal berikut ini:
   a) cos (3a + 2b) dan cos (3a - 2b)
   b) sin (4p + 7q) dan sin (4p - 7q)
   c) tan (5x + 8y) dan tan (5x - 8y)
2. Tulislah rumus trigonometri sudut ganda dari soal berikut ini:
   a) sin 2p, cos 2p dan tan 2p dalam p.
   b) sin a, cos a dan tan a dalam ½ a.
   c) sin 6x, cos6x dan tan 6x dalam 3x.
   3. Hitunglah nilai dari sinus dari sudut berikut:
   a) $22,5^0$
   b) $67,5^0$
4. Buktikanlah identitas trigonometri berikut ini:
   a) sin (a + b + c) = sin a cos b cos c + cos a sin b cos c + cos a cos b sin c -sin a sin b sin c
   b) cos (a + b + c) = cos a cos b cos c -sin a sin b cos c -sin a cos b sin c - cos a sin b sin c
   c) $\tan(a+b+c) = \dfrac{\tan a ? \tan b ? \tan c ? \tan a \tan b \tan c}{1 ? \tan b \tan c ? \tan c \tan a ? \tan a \tan b}$
5. Tentukan penyelesaian persamaan trigonometri berikut ini:
   a) $\cos \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$; untuk $0 \leq x \leq 360^0$
   b) cos x – sin x = 1; untuk $0 \leq x \leq 360^0$

g. Kunci Tes Formatif

1. a) $\cos(3a + 2b) = \cos 3a \cos 2b - \sin 3a \sin 2b$

   $\cos(3a - 2b) = \cos 3a \cos 2b + \sin 3a \sin 2b$

   b) $\sin(4p + 7q) = \sin 4p \cos 7q + \cos 4p \sin 7q$

   $\sin(4p - 7q) = \sin 4p \cos 7q - \cos 4p \sin 7q$

   c) $\tan(5x + 8y) = \dfrac{\tan 5x \;?\; \tan 8y}{1 \;?\; \tan 5x \tan 8y}$

   $\tan(5x - 8y) = \dfrac{\tan 5x \;?\; \tan 8y}{1 \;?\; \tan 5x \tan 8y}$

2. a) $\sin 2p = 2 \sin p \cos p$, $\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p$ dan $\tan 2p = \dfrac{2\tan 2p}{1 \;?\; \tan^2 2p}$

   b) sin a = 2 sin (½p) cos (½p), cos a= $\cos^2$ (½p) - sin2(½p), tan a =?

   c) sin 6x = 2 sin 3x cos 3x, cos6x = cos2(3x) - $\sin^2$(3x), tan 6x = ?.

3. a) $\cos 45^0 = 2\cos^2 22{,}5^0 - 1$

   $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2\cos^2 22{,}5^0 - 1$

   $\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 = 2\cos^2 22{,}5^0$

   $(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1)/2 = \cos^2 22{,}5^0$

   $\cos^2 22{,}5^0 = \sqrt{\dfrac{\dfrac{\sqrt{2} \;?\; 2}{2}}{2}} \;?\; \sqrt{\dfrac{\sqrt{2} \;?\; 2}{4}} \;?\; \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} \;?\; 2}{2}}$

   b) $\sin 45^0 = 1 - 2\sin^2 22{,}5^0$

   $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 - 2\sin^2 22{,}5^0$

   $2\sin^2 22{,}5^0 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

   $\sin^2 22{,}5^0 = (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})/2$

$$\sin^2 22{,}5^0 = \sqrt{\frac{\frac{2 ? \sqrt{2}}{2}}{2}} ? \sqrt{\frac{2 ? \sqrt{2}}{4}} ? \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 ? \sqrt{2}}{2}}$$

4. tan ? = n = $\frac{y}{x}$; sehingga x= 1 dan y = n.

r = $\sqrt{1^2 ? n^2} ? \sqrt{n^2 ? 1^2}$

sin ? = $\frac{y}{r} ? \frac{n}{\sqrt{n^2 ? 1}}$; cos ? = $\frac{x}{r} ? \frac{1}{\sqrt{n^2 ? 1}}$

sin 2? = 2sin? .

cos ? = 2 $\frac{n}{\sqrt{n^2 ? 1}} . \frac{1}{\sqrt{n^2 ? 1}}$ = $\frac{2n}{n^2 ? 1}$

sin ½ ? =....? Cos ? = 1- 2sin^2 ?

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 ? 1}} = 1 - 2\sin^2 ?$$

$$2\sin^2 ? = 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 ? 1}}$$

$$\sin^2 ? = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n^2 ? 1}} ? \quad \sin ? = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n^2 ? 1}}}$$

5. a) cos ½ x = ½ ; 0 ? x ? 360^0

cos ½ x = cos 60^0

½ x = 60^0

$x_1 = 120^0 + k.360^0$ $x_2 = -120^0 + k.360^0$

k=0? $x_1 = 120^0$ k=0? $x_2 = -120^0$ (TM)

k=1? $x_1 = 480^0$(TM/tidak termasuk) k=1? $x_2 = 240^0$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{120^0, 240^0\}$

b) cos x –sin x = 1 ; 0 ? x ? 360^0

k = $\sqrt{a^2 ? b^2} ? \sqrt{(1)^2 ? (?1)^2} ? \sqrt{1 ? 1} ? \sqrt{2}$

tan ? = $\frac{b}{a} = \frac{?1}{1} ? ?1$

$? = 135^0$ (KW IV)

sehingga: $k \cos (x-?) = 1$

$\sqrt{2} \cos (x-135^0) = 1$

$\cos (x-135^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} ? \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos (x-135^0) = \cos 45^0$

$x_1-135^0 = 45^0 + k.360^0$	$x_1-135^0 = -45^0 + k.360^0$
$x_1 = 360^0 + k.360^0$	$x_1 = 90^0 + k.360^0$
untuk $k=-1 ? \ x_1 = 0^0$	$k=-1 ? \ x_1 = 270^0$
$k= 0 ? \ x_1 = 360^0$	$k= 0 ? \ x_1 = 90^0$
$k=1 ? \ x_1 = 720^0$ (TM)	$k=1 ? \ x_1 = 450^0$ (TM)

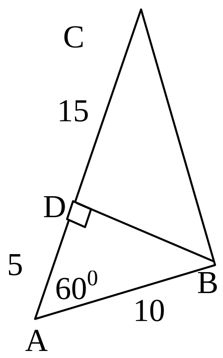
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{0^{0,}90^0, 270^0,360^0\}$

BAB III. EVALUASI

A. Soal Tes Evaluasi

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan singkat dan jelas!

1. Tentukan nilai sin, cos dan tan dari sudut berikut ini:
   a) 135^0
   b) -60^0
   c) 390^0
2. Diketahui suatu segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya ?. sin ? = p, jika ? sudut tumpul, maka tentukan tan ? dan cos ?!
3. Hitunglah operasi nilai trigonometri sudut, berikut ini.
   $\tan(-45^0) + \sin 120^0 + \cos 225^0 - \cos 30^0$
4. Diketahui segitiga ABC seperti gambar di bawah ini.



Tentukan panjang garis tinggi BD dan luas ?ABC!

5. Jika A, B, dan C masing-masing sudut suatu segitiga (bukan segitiga siku-siku), buktikan bahwa tan A + tan B + tan C=tanA tan B tan C!.
6. Tentukan penyelesaian persamaan trigonometri berikut ini:
   a) $\cos 2x = ½$; untuk $0 \leq x \leq 360^0$
   b) $2\cos x - \sin x = \sqrt{3}$; untuk $0 \leq x \leq 360^0$

B. Kunci Jawaban Tes Evaluasi

1. a) $\sin 135^0 = \sin (180^0 - 45^0)$

   $= \sin 45^0$

   $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

   b) $\sin -60^0 = -\sin 60^0$

   $= ?\, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   c) $\sin 390^0 = \sin (30 + 1.360)$

   $= \sin 30$

   $= \frac{1}{2}$

2. $\sin ? = p = \frac{y}{r}$, ? sudut tumpul? $\frac{?}{2}$? ? ?? (kuadran II)

   sehingga nilai tan ? negatif. $x = \sqrt{1^2 ? p^2} ? \sqrt{1 ? p^2}$

   maka: $\tan ? = \frac{? p}{\sqrt{1 ? p^2}}$; $\cos ? = \sqrt{1 ? p^2}$

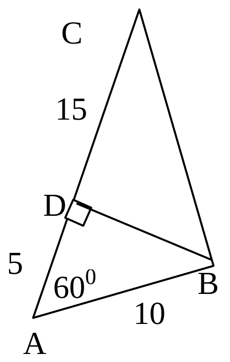
3. $\tan (-45^0) + \sin 120^0 + \cos 225^0 - \cos 30^0$

   $= -\tan 45^0 + \sin 60^0 - \cos 45^0 - \cos 30^0$

   $= -1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   $= -1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

4. **Cara I:**



Dengan menggunakan teorema phytagoras:

$BD^2 = AB^2 - AD^2$

$BD^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$

$BD = \sqrt{75} ? 5\sqrt{3}$

Luas segitiga = ½ AC.BD = ½.20. $5\sqrt{3}$

$= 50\sqrt{3}$ satuan luas.

Cara II: menggunakan perbandingan trigonometri

Sin 60^0 = $\frac{BD}{AB} ? \frac{BD}{10} ?$ BD = Sin 60^0. 10 = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.10 = $5\sqrt{3}$

? A = diapit oleh sisi AB dan AC, maka rumus luas segitiga yang dapat kita pakai adalah:

Luas Segitiga ABC = ½ AB.AC sin ? A

= ½ 10.20 sin 60^0

= ½ 10.20.$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

= $50\sqrt{3}$ satuan luas.

5. A, B dan C adalah sudut-sudut suatu segitiga.

Ingat: jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180^0.

Sehingga berlaku:

A + B + C = 180^0

tan C = tan (180^0 – (A+B))

tan C = -tan (A+B)

tan C = $? \left(\frac{\tan A ? \tan B}{1 ? \tan A \tan B} \right)$

tan C = $\frac{\tan A ? \tan B}{\tan A \tan B ? 1}$? tan A + tan B = (tan A tan B –1)tan C

? tan A + tan B = tan A tan B tan C –tan C

? tan A + tan B+ tan C = tan A tan B tan C

terbukti.

6. a) cos 2 x = ½ ; 0 ? x ? 360^0

cos 2 x = cos 60^0

2x = 60^0

$x_1 = 30^0 + k.360^0$ $x_2 = -30^0 + k.360^0$

k=0? $x_1 = 30^0$ k =0? $x_2 = -30^0$ (TM)

k=1? $x_1 = 390^0$(TM/tidak termasuk) k =1? $x_2 = 330^0$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {30^0,330^0}

b) 2cos x –sin x = $\sqrt{3}$; 0 ? x ? 360^0

k = $\sqrt{a^2 ? b^2} ? \sqrt{(2)^2 ? (?1)^2} ? \sqrt{2 ? 1} ? \sqrt{3}$

tan ? = $\frac{b}{a}$ = $\frac{?1}{2} ? ? \frac{1}{2}$

? =[360^0 - arc tan($\frac{1}{2}$)] (KW IV)

sehingga: k cos (x-?) = $\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$ cos (x-[360^0 - arc tan($\frac{1}{2}$)]) = $\sqrt{3}$

cos (x-[360^0 - arc tan($\frac{1}{2}$)]) = 1

cos (x-[360^0 - arc tan($\frac{1}{2}$)]) = cos 90^0

x_1-[360^0 - arc tan($\frac{1}{2}$)]= 90^0 + k.360^0...............dan seterusnya.

BAB IV. PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, anda berhak untuk mengikuti tes praktek untuk menguji kompetensi yang telah anda pelajari. Apabila anda dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada guru untuk uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak industri atau asosiasi yang berkompeten apabila anda telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari guru atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak industri atau asosiasi profesi. Kemudian selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat anda berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh dunia industri atau asosiasi profesi.

DAFTAR PUSTAKA

Kanginan, Marthen dan Kustendi, T. 2001. MATEMATIKA untuk SMU kelas II jilid 2A. Bandung: Grafindo Media Pratama.

Purcel, E.J. dan D. Verberg. 1986. *Kalkulus dan Geonetri Analitik I*. Terjemahan I.N. Susila, B. Kartasasmita dan rawuh. Jakarta: Erlangga.

Suherman, Erman dkk. 2003. *Strategi Pembelajaran ontemporer*. Bandung: JICA-IMSTEP.

Sembiring, Suwah. 1996. *Kumpulan soal dan pembahasan UMPTN 1992-1996 Rayon A, B, C.* Bandung: Ganesha Operation.