PANDUAN OLIMPIADE SAINS NASIONAL MATEMATIKA SMA/MA

Seperti umumnya kompetisi matematika yang serius, Olimpiade Sains Nasional Matematika SMA/MA mengukur secara langsung tiga aspek berikut: pemecahan masalah (*problem solving*), penalaran (*reasoning*), dan komunikasi tertulis. Oleh karena itu, persiapan calon peserta OSN semestinya berorientasi kepada peningkatan kemampuan dalam ketiga aspek tersebut.

Pemecahan masalah dipahami sebagai pelibatan diri dalam masalah tidak-rutin (*non-routine problem*), yaitu masalah yang metode penyelesaiannya tidak diketahui di muka. Masalah tidak-rutin menuntut pemikiran produktif seseorang untuk menciptakan (*invent*) strategi, pendekatan dan teknik untuk memahami dan menyelesaikan masalah tersebut. Pengetahuan dan ketrampilan saja tidak cukup. Ia harus dapat memilih pengetahuan dan ketrampilan mana yang relevan, meramu dan memanfaatkan hasil pilihannya itu untuk menangani masalah tidak-rutin yang dihadapinya.

Boleh jadi seseorang secara intuitif dapat menemukan penyelesaian dari masalah matematika yang dihadapinya. Bagaimana ia dapat meyakinkan dirinya (dan orang lain) bahwa penyelesaian yang ditemukannya itu memang penyelesaian yang benar? Ia harus memberikan justifikasi (pembenaran) untuk penyelesaiannya itu. Justifikasi yang dituntut disini mestilah berdasarkan *penalaran matematika* yang hampir selalu berarti penalaran deduktif. Peserta OSN Matematika SMA/MA perlu menguasai teknik-teknik pembuktian seperti bukti langsung, bukti dengan kontradiksi, kontraposisi, dan induksi matematika.

OSN Matematika SMA/MA berbentuk tes tertulis. Oleh karena itu, peserta perlu memiliki kemampuan *berkomunikasi secara tertulis*. Tulisan haruslah efektif, yaitu dapat dibaca dan dimengerti orang lain serta menyatakan dengan tepat apa yang dipikirkan penulis.

Selain itu, OSN Matematika SMA/MA adalah tes dengan waktu terbatas. Ini berarti bahwa peserta harus dapat melakukan ketiga hal di atas secara efisien.

Sebelum seseorang diundang untuk menjadi peserta OSN Matematika SMA/MA, ia harus melewati setidaknya dua saringan terlebih dahulu, yaitu:

1. Seleksi tingkat kota/kabupaten, berupa tes dengan format pilihan ganda dan isian singkat. Setiap format terdiri dari masing-masing 10 soal dengan bobot yang sama. Tes ini hanya menguji kemampuan pemecahan masalah.
2. Seleksi tingkat propinsi, berupa tes dengan format isian singkat dan uraian. Ada 20 soal isian singkat dan 5 soal uraian. Setiap soal isian singkat bernilai 1 angka, sedangkan setiap soal uraian bernilai 7 angka. Ketiga kemampuan pemecahan masalah, bernalar dan berkomunikasi mulai diuji pada tingkat ini. Kemampuan pemecahan masalah tetap menjadi fokus pada seleksi ini. Bagian isian singkat akan diperiksa, dinilai dan diurutkan terlebih dahulu. Bagian uraian yang diperiksa dan

dinilai hanya untuk peserta seleksi yang menempati urutan 400 terbaik secara nasional pada bagian isian singkat.

OSN Matematika SMA/MA sendiri akan dilangsungkan selama dua hari berturutan. Setiap hari, peserta akan menghadapi masing-masing empat soal uraian. Setiap soal bernilai sama, yaitu 7 angka.

Cakupan Materi

Mengikuti kelaziman yang berlaku pada IMO (*International Mathematical Olympiad*), cakupan materi matematika OSN dibagi ke dalam empat kelompok: aljabar, geometri, kombinatorika, dan teori bilangan. Teori bilangan membahas tentang bilangan bulat.

Pada dasarnya, OSN Matematika SMA/MA mencakup materi matematika yang lazim diberikan dalam kurikulum pendidikan dasar dan menengah, di luar materi kalkulus dan statistika, dan sejumlah tambahan. Dengan diberlakukannya KTSP (Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan), kurikulum di satu sekolah dapat berbeda dari sekolah lain, sehingga materi tambahan ini mungkin sudah dicakup dalam kurikulum sejumlah sekolah. Oleh karena itu, daftar materi tambahan berikut bisa jadi beririsan (*overlap*) dengan materi dalam kurikulum. Hendaknya diingat juga bahwa peserta OSN diharapkan memahami materi yang diujikan, bukan sekadar mengetahui fakta materi tersebut.

Berikut ini adalah daftar materi untuk OSN Matematika SMA/MA.

Aljabar:

- Sistem bilangan real
    - Himpunan bilangan real dilengkapi dengan operasi tambah dan kali beserta sifat-sifatnya.
    - Sifat urutan (sifat trikotomi, relasi lebih besar/kecil dari, beserta sifat-sifatnya)
- Ketaksamaan
    - Penggunaan sifat urutan untuk menyelesaikan soal-soal ketaksamaan.
    - Penggunaan sifat bahwa kuadrat bilangan real selalu non negatif untuk menyelesaikan soal-soal ketaksamaan.
    - Ketaksamaan yang berkaitan dengan rataan kuadratik, rataan aritmatika, rataan geometri, dan rataan harmonik.
- Nilai mutlak
    - Pengertian nilai mutlak dan sifat-sifatnya
    - Aspek geometri nilai mutlak
    - Persamaan dan ketaksamaan yang melibatkan nilai mutlak
- Sukubanyak (polinom)
    - Algoritma pembagian
    - Teorema sisa
    - Teorema faktor
    - Teorema Vieta (sifat simetri akar)

- Fungsi
    - Pengertian dan sifat-sifat fungsi
    - Komposisi fungsi
    - Fungsi invers
- Sistem koordinat bidang
    - Grafik fungsi
    - Persamaan dan grafik fungsi irisan kerucut (lingkaran, ellips, parabola, dan hiperbola)
- Barisan dan deret
    - Suku ke-n suatu barisan
    - Notasi sigma
- Persamaan dan sistem persamaan
    - Penggunaan sifat-sifat fungsi untuk menyelesaikan persamaan dan sistem persamaan
    - Penggunaan ketaksamaan untuk menyelesaikan persamaan dan sistem persamaan

Geometri:
- Hubungan antara garis dan titik
- Hubungan antara garis dan garis
- Bangun-bangun bidang datar
    - Segitiga
    - Segiempat
    - Segibanyak beraturan
    - Lingkaran
- Kesebangunan dan kekongruenan
- Sifat-sifat segitiga: garis istimewa (garis berat, garis bagi, garis tinggi, garis sumbu)
- Dalil Menelaus
- Dalil Ceva
- Dalil Stewart
- Relasi lingkaran dengan titik
    - Titik kuasa (*power point*)
- Relasi lingkaran dengan garis:
    - Bersinggungan
    - Berpotongan
    - Tidak berpotongan
- Relasi lingkaran dengan segitiga:
    - Lingkaran dalam
    - Lingkaran luar
- Relasi lingkaran dengan segiempat:
    - Segi empat tali busur (beserta sifat-sifatnya)
    - Dalil Ptolomeus
- Relasi lingkaran dengan lingkaran:
    - Dua lingkaran tidak beririsan: baik salah satu di dalam atau di luar yang lain

  - Dua lingkaran beririsan di satu titik (bersinggungan): dari dalam atau dari luar
  - Dua lingkaran beririsan di dua titik
  - Lingkaran-lingkaran sepusat (konsentris)
- Garis-garis yang melalui satu titik (konkuren), titik-titik yang segaris (kolinier)
- Trigonometri (perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas)
- Bangun-bangun ruang sederhana

Kombinatorika:
- Prinsip pencacahan
  - Prinsip penjumlahan
  - Prinsip perkalian
  - Permutasi dan kombinasi
  - Penggunaan prinsip pencacahan untuk menghitung peluang suatu kejadian
- Prinsip rumah merpati (*pigeonhole principle*, prinsip Dirichlet)
- Prinsip paritas

Teori bilangan:
- Sistem bilangan bulat (himpunan bilangan bulat dan sifat-sifat operasinya)
- Keterbagian (pengertian, sifat-sifat elementer, algoritma pembagian)
- Faktor persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil, relatif prima, algoritma Euklid
- Bilangan prima
- Teorema dasar aritmatika (faktorisasi prima)
- Persamaan dan sistem persamaan bilangan bulat
- Fungsi tangga

Contoh-contoh soal

Soal Tingkat Kabupaten/Kota

Aljabar

[2007] Misalkan $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = \sqrt{x}$. Jika $f(g(x)) = 3$, maka x = ...

Jawab: 4

Perhatikan bahwa

$$2\sqrt{x} - 1 = f\left(\sqrt{x}\right) = f\left(g(x)\right) = 3,$$

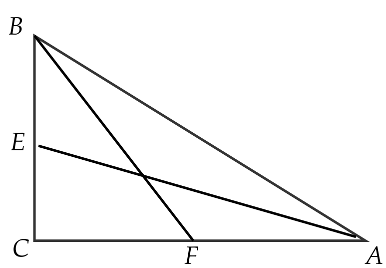
ekivalen dengan $\sqrt{x} = 2$. Akibatnya $x = 4$.

Geometri

[2007] Pada segitiga ABC yang siku-siku di C, AE dan BF adalah garis-garis berat. Maka $\dfrac{|AE|^2 + |BF|^2}{|AB|^2} =$ ......

Jawab: $\dfrac{5}{4}$

Perhatikan ilustrasi berikut



$$\begin{aligned}
|AE|^2 + |BF|^2 &= \left(|AC|^2 + |CE|^2\right) + \left(|BC|^2 + |CF|^2\right) \\
&= \left(|AC|^2 + \frac{1}{4}|BC|^2\right) + \left(|BC|^2 + \frac{1}{4}|AC|^2\right) \\
&= \frac{5}{4}\left(|AC|^2 + |BC|^2\right) \\
&= \frac{5}{4}|AB|^2 .
\end{aligned}$$

Jadi $\dfrac{|AE|^2 + |BF|^2}{|AB|^2} = \dfrac{5}{4}$.

Kombinatorika

[2002] Wati menuliskan suatu bilangan yang terdiri dari 6 angka (6 digit) di papan tulis, tetapi kemudian Iwan menghapus 2 buah angka 1 yang terdapat pada bilangan tersebut sehingga bilangan yang terbaca menjadi 2002. Berapa banyak bilangan dengan enam digit yang dapat Wati tuliskan agar hal seperti di atas dapat terjadi?

Jawab:
Banyaknya cara Wati menuliskan bilangan 6-angka sama dengan banyaknya cara menyisipkan dua angka 1 pada bilangan 2002 (termasuk sebelum angka pertama dan sesudah angka terakhir). Ada lima tempat menyisipkan, yaitu 3 di dalam, 1 di depan, dan 1 di belakang:

_2_0_0_2_.

Jika kedua angka 1 terpisah, ada C_2^5 = 10 cara melakukannya. Jika kedua angka 1 bersebelahan, ada 5 cara melakukannya. Jadi ada 10 + 5 = 15 cara Wati menuliskan bilangan 6-angka.

Teori Bilangan

[2007] Misalkan H adalah himpunan semua faktor positif dari 2007. Banyaknya himpunan bagian dari H yang tidak kosong adalah

A. 6 B. 31 C. 32 D. 63 E. 64

Jawab: D

Faktorisasi prima dari 2007 adalah

$$2007 = 3^2 \times 223.$$

Oleh karena itu faktor positif dari 2007 sebayak (2+1)(1+1) = 6, yaitu 1, 3, 9, 223, 669, dan 2007. Jadi banyaknya himpunan bagian dari H yang tidak kosong adalah $2^6 - 1 = 63$.

Soal Tingkat Propinsi

Aljabar

[2005] Jika α, β, dan γ adalah akar-akar persamaan $x^3 - x - 1 = 0$, tentukan

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

Jawab:

Misalkan $f(x) = x^3 - x - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

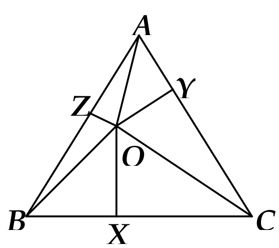
Menurut Teorema Vieta, $\alpha\beta\gamma = 1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = -1$, dan $\alpha+\beta+\gamma = 0$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma} &= \left(1+\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right)+\left(1+\frac{2\beta}{1-\beta}\right)+\left(1+\frac{2\gamma}{1-\gamma}\right)\\
&= 3+2\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\beta}+\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\\
&= 3+2\left(\frac{\alpha(1-\beta)(1-\gamma)+(1-\alpha)\beta(1-\gamma)+(1-\alpha)(1-\beta)\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}\right)\\
&= 3+2\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma}{f(1)}\right)\\
&= 3+2\left(\frac{0-2(-1)+3.1}{-1}\right)\\
&= -7.
\end{aligned}$$

Geometri

[2005] Keliling sebuah segitiga samasisi adalah p. Misalkan Q sebuah titik di dalam segitiga tersebut. Jika jumlah jarak dari Q ke ketiga sisi segitiga adalah s, maka, dinyatakan dalam s, p = ...

Jawab: $2s\sqrt{3}$.



Misalkan QX, QY, dan QZ berturut-turut adalah jarak Q ke sisi BC, AC, dan AB. Perhatikan bahwa

$$\text{Luas } \Delta ABC = \text{Luas } \Delta BQC + \text{Luas } \Delta AQC + \text{Luas } \Delta AQB.$$

Sehingga

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^o = \frac{1}{2} \times BC \times QX + \frac{1}{2} \times AC \times QY + \frac{1}{2} \times AB \times QZ,$$

yaitu

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}p \times \frac{1}{3}p \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}p \times QX + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}p \times QY + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}p \times QZ.$$

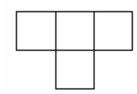
Diperoleh

$$\frac{1}{3}p \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = QX + QY + QZ = s.$$

Sehingga $p = \frac{6}{\sqrt{3}} s = 2s\sqrt{3}$.

Kombinatorika

[2002] Bangun pada gambar disebut *tetromino*-T. Misalkan setiap petak tetromino menutupi tepat satu petak pada papan catur. Kita ingin menutup papan catur dengan tetromino-tetromino sehingga setiap petak tetromino menutup satu petak catur tanpa tumpang tindih.

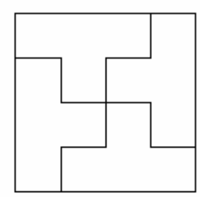


tetromino-T

(a) Tunjukkan bahwa kita dapat menutup papan catur biasa, yaitu papan catur dengan 8 × 8 petak, dengan menggunakan 16 tetromino-T.

(b) Tunjukkan bahwa kita tidak dapat menutup papan `catur' 10 × 10 petak dengan 25 tetromino-T.

Jawab:



(a) Perhatikan bahwa setiap papan 4 × 4 dapat ditutup dengan empat tetromino-T seperti pada gambar. Karena setiap papan catur 8 × 8 dapat disusun dari empat papan 4 × 4, maka setiap papan catur 8 × 8 dapat ditutup dengan 16 tetromino-T.

(b) Warnai petak-petak papan 10 × 10 dengan warna hitam dan putih seperti pola pada papan catur. Maka setiap tetromino-T menutup tiga petak putih dan satu petak hitam, atau satu petak putih dan tiga petak hitam. Suatu tetromino-T kita katakan *tipe A* jika ia menutup tiga petak putih dan satu petak hitam, dan kita katakan *tipe B* jika ia menutup satu petak hitam dan tiga petak putih.

Andaikan papan 10 × 10 dapat ditutup dengan 25 tetromino-T. Misalkan ada x tetromino-T tipe A dan $25-x$ tetromino-T tipe B di antara ke-25 tetromino yang menutup papan 10 × 10 tersebut. Maka banyaknya petak putih yang ditutupi adalah $3x+25-x=2x$-25. Karena papan 10 × 10 memiliki 50 petak putih, haruslah $2x-25 = 50$ yang berarti $x = 75/2$. Karena x adalah bilangan bulat, kita sampai pada sebuah kontradiksi.

Jadi papan 10 × 10 tidak dapat ditutup dengan 25 tetromino-T.

Teori Bilangan

[2005] Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah ......

Jawab: 729.

Bilangan tiga-angka yang merupakan bilangan kubik sempurna adalah

$$125 = 5^3,\ 216 = 6^3,\ 343 = 7^3,\ 512 = 8^3, \text{ dan } 729 = 9^3.$$

Diantara kelima bilangan itu yang merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah $729 = 27^2$.

Soal Tingkat Nasional

Aljabar

[2006] Tentukan semua pasangan bilangan real (x,y) yang memenuhi $x^3 - y^3 = 4(x - y)$ dan $x^3 + y^3 = 2(x + y)$.

Jawab:

Kasus I: Untuk $x = y$. Dari persamaan kedua diperoleh $2x^3 = 4x$, yang dipenuhi oleh $x = 0$ atau $x = \pm\sqrt{2}$.

Kasus II: Untuk $x = -y$. Dari persamaan pertama diperoleh $2x^3 = 8x$, yang dipenuhi oleh $x = 0$ atau $x = \pm 2$.

Kasus III: Untuk $x \neq y$ dan $x \neq -y$. Persamaan pertama dan kedua berturut-turut dibagi dengan $x - y$ dan $x + y$ diperoleh

$$x^2 + xy + y^2 = 4 \text{ dan } x^2 - xy + y^2 = 2.$$

Dengan menjumlahkan dan mengurangkan kedua persamaan terakhir diperoleh

$$x^2 + y^2 = 3 \text{ dan } xy = 1.$$

Sehingga

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 3 + 2 = 5.$$

Diperoleh $x + y = \pm\sqrt{5}$.

Dengan substitusi $y = \dfrac{1}{x}$ pada persamaan terakhir diperoleh persamaan kuadrat dalam x: $x^2 \mp \sqrt{5}x + 1 = 0$. Diperoleh

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} \pm 1\right) \text{ dan } x = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{5} \pm 1\right).$$

Dari Kasus I, II, dan III diperoleh pasangan-pasangan bilangan real

(0,0), ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), (-$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), (2,-2), (-2,2), $\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)$, $\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\right)$,

$\left(\frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}+1\right), \frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}-1\right)\right)$, dan $\left(\frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}-1\right), \frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}+1\right)\right)$.

Setelah dicek semua pasangan di atas memenuhi kedua persamaan yang diberikan.

Geometri

[2006] Misalkan S adalah himpunan semua segitiga ABC yang memenuhi sifat: tan A, tan B, dan tan C adalah bilangan-bilangan asli. Buktikan bahwa semua segitiga anggota S sebangun.

Jawab:

Misalkan ABC sebuah segitiga anggota S. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan bahwa

$90° > \angle A \geq \angle B \geq \angle C > 0°$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \tan A &= -\tan(180° - A) \\ &= -\tan(B + C) \\ &= -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}. \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \tan A\,(1 - \tan B \tan C)$

$= - (\tan B + \tan C)$.

Sehingga $\tan A$ membagi $\tan B + \tan C$. Dan karena $\tan A \geq \tan B \geq \tan C$, maka

$$2 \tan A \geq \tan B + \tan C.$$

Ada dua kasus perlu ditinjau.

Kasus 1: $2 \tan A = \tan B + \tan C$. Dalam hal ini, haruslah $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, sehingga $\tan A = \sqrt{3}$, kontradiksi!

Kasus 2: $\tan A = \tan B + \tan C$. Dalam hal ini, kita punya bahwa

$- (\tan B + \tan C) = \tan A\,(1 - \tan B \tan C)$

$= (\tan B + \tan C)(1 - \tan B \tan C)$,

atau setara dengan $2 = \tan B \tan C$. Karena $\tan B \geq \tan C$, haruslah

$$\tan B = 2 \text{ dan } \tan C = 1,$$

sehingga $\tan A = 2 + 1 = 3$.

Kita simpulkan bahwa semua segitiga ABC anggota S dengan $\angle A \geq \angle B \geq \angle C$ memenuhi $\tan A = 3$, $\tan B = 2$ dan $\tan C = 1$. Kesimpulan pada soal mengikuti.

Kombinatorika

[2006] Misalkan $n > 2$ sebuah bilangan asli tetap. Sebuah bidak hitam ditempatkan pada petak pertama dan sebuah bidak putih ditempatkan pada petak terakhir sebuah papan 'catur' berukuran $1 \times n$. Wiwit dan Siti lalu melangkah bergantian. Wiwit memulai permainan dengan bidak putih. Pada setiap langkah, pemain memindahkan bidaknya sendiri satu atau dua petak ke kanan atau ke kiri tanpa melompati bidak lawan. Pemain yang tidak bisa melangkah dinyatakan kalah. Pemain manakah yang memiliki cara (strategi) untuk selalu memenangkan permainan, apapun yang dilakukan lawannya? Jelaskan strategi permainan tersebut.

Jawab:

Strateginya tergantung pada m, yakni banyaknya kotak kosong di antara bidak. Sebut pemain pertama sebagai penyerang dan pemain kedua pihak bertahan.

(a) Perhatikan kasus-kasus sederhana dari m, yang nantinya bisa dikembangkan menjadi bentuk umum:

Kasus 1: $m = 0$. Jelas bahwa pihak ber-tahan bisa memenangkan permainan. Penyerang hanya bisa bergerak satu atau dua langkah dari musuh. Dengan segera pihak bertahan bisa menutup kembali kekosongan tersebut. Hal ini bisa dilakukan terus hingga penyerang mencapai kolom ujung. Akibatnya penyerang tidak mungkin bergerak lagi.

Kasus 2: $m = 1$ atau $m = 2$. Penyerang menang, yakni dengan menutup kekosongan, sehingga terjadi Kasus 1.

Kasus 3: $m = 3$. Jika penyerang mem-buat jarak yang lebih kecil, maka akan menjadi Kasus 2. Karenanya, lebih menguntungkan jika memperbesar jarak. Tetapi pada kasus ini pihak bertahan bisa mengatur jarak menjadi 3 satuan lagi, demikian seterusnya hingga akhirnya penyerang berada pada kolom ujung. Jelas bahwa akhirnya jarak bidak menjadi lebih kecil, sehingga pihak bertahan bisa memenangkan permainan.

(b) Secara umum dapat ditunjukkan dengan induksi bahwa jika m habis dibagi 3, maka pihak bertahan mempunyai strategi untuk menang. Jika $m = 0$, maka terjadi Kasus 1.

Misalkan benar untuk $m - 3 \geq 0$ dengan m habis dibagi 3.

Untuk setiap $m > 0$, pihak bertahan bisa memaksa agar jarak menjadi $m - 3$. Setiap kali penyerang mengurangi jarak sebanyak 1 atau 2 satuan, maka pihak bertahan cukup melangkah agar jarak menjadi $m - 3$. Jika penyerang menambah jarak sebanyak 1 atau 2 satuan, maka pihak bertahan bisa melangkah mendekati penyerang agar jarak kembali menjadi m, hingga pada akhirnya penyerang berada di kolom ujung, sehingga pihak bertahan bisa memaksa agar langkah-langkah berikutnya menyebabkan jarak menjadi lebih kecil. Karena m habis dibagi 3, strategi ini dapat diulang hingga menghasilkan $m = 0$. Maka, pihak bertahan memenangkan permainan.

(c) Jika m tidak habis dibagi 3, maka penyerang bisa memenangkan pertandingan, yakni dengan cara pada langkah pertama penyerang melangkah sedemikian sehingga m habis dibagi 3, dan kemudian memenangkan pertandingan dengan langkah pihak bertahan sebagaimana yang telah digambarkan sebelumnya (yakni untuk m habis dibagi 3).

Jadi, jika jarak kosong antara kedua bidak habis dibagi 3, maka Siti sebagai pihak bertahan bisa memenangkan pertandingan. Sebaliknya, jika jarak kosong antara kedua bidak tidak habis dibagi 3, maka Wiwit sebagai penyerang bisa memenangkan pertandingan.

Teori Bilangan

[2005] Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Buktikan bahwa ada tepat satu bilangan bulat m yang memenuhi persamaan

$$m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005.$$

Jawab:
Misalkan m bilangan bulat. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005 \quad \Leftrightarrow \quad & \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = m - 2005 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{m}{2005} - 1 < m - 2005 \le \frac{m}{2005} \\
\Leftrightarrow\ & m - 2005 < 2005(m - 2005) \le m \\
\Leftrightarrow\ & 2005^2 - 2005 < 2004m \le 2005^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2004 \times 2005 < 2004m \le 2004 \times 2007 \\
\Leftrightarrow\ & 2005 < m \le 2007 .
\end{aligned}$$

Sehingga $m = 2006$. Substitusi $m = 2006$ ke dalam persamaan memberikan pernyataan yang bernilai benar. Jadi $m = 2006$ adalah satu-satunya bilangan bulat yang memenuhi persamaan yang dimaksud